

## **GUÍA DEL MAESTRO**

### **Números Enteros y Resolución de Problemas**

**Autor:** Dr. Edwin Morera González

**Materia:** Matemáticas

**Nivel:** 7-9

**Concepto Principal:** Números Enteros

**Concepto Secundario:** Solución de Problemas

**Conocimiento previo:** Conocer los conjuntos numéricos. Suma, resta, multiplicación y división de enteros. Estar familiarizado con la resolución de problemas verbales.

#### **Objetivos específicos:**

Al finalizar la actividad los participantes:

1. Definirán los siguientes conjuntos numéricos:
  - a. Números naturales
  - b. Números cardinales
  - c. Números enteros
2. Definirá las siguientes propiedades de los números enteros:
  - a. Asociativa de la suma
  - b. Asociativa de la multiplicación
  - c. Conmutativa de la suma
  - d. Conmutativa de la multiplicación
  - e. Distributiva de la multiplicación sobre la suma
3. Dada una afirmación distinguirá la propiedad de los números enteros que la justifica.
4. Definirá el orden operacional.
5. Utilizará el orden operacional para simplificar expresiones aritméticas.
6. Utilizará la calculadora gráfica para:
  - a. Sumar, restar, multiplicar y dividir de enteros.
  - b. Calcular potencias con exponentes positivos.
  - c. Simplificar expresiones aritméticas.
7. Resolverá problemas que involucran números enteros.
8. Reconocerá la plausibilidad de la solución de un problema verbal.

**Estándares, Expectativas y Especificidades por Grado:****ESTÁNDAR DE CONTENIDO 1: NUMERACIÓN Y OPERACIÓN**

El estudiante es capaz de entender los procesos y conceptos matemáticos al representar, estimar, realizar cálculos, relacionar números y sistemas numéricos.

2.0 Modela las operaciones, realiza cálculos con fluidez y resuelve problemas con números enteros

N.SO.7.2.1 Modela la suma, resta, multiplicación y división con números enteros, describe las relaciones entre estas operaciones y aplica el orden de operaciones.

N.OE.7.2.2 Realiza cálculos con fluidez con los números enteros, incluyendo las raíces de cuadrados perfectos y cubos perfectos.

N.OE.7.2.3 Representa y soluciona problemas matemáticos y de la vida real que involucre los números enteros.

N.OE.7.2.4 Estima y juzga la razonabilidad de los resultados que involucran las operaciones con enteros.

**Trasfondo:**

La mente humana posee una inclinación natural a reunir o agrupar. Cuando vemos en el firmamento tres estrellas reunidas, en lugar de considerarlas como tres elementos separados, los seres humanos tendemos a verlas como un grupo de estrellas. Así pues, nuestra mente trata de encontrar orden y patrones. En matemáticas, es representada mediante el concepto de *conjunto*. Un **Conjunto** es un grupo o colección de objetos. Cada objeto que pertenece al conjunto se denomina **elemento** del conjunto.

En esta capacitación trabajaremos con el conjunto de los números enteros, sus operaciones básicas, el orden operacional, el uso eficiente de la calculadora gráfica y la resolución de problemas. El conjunto de los números enteros junto a las operaciones de suma y multiplicación, satisfacen una serie de propiedades que los convierte en una estructura algebraica básica en las matemáticas. El conocimiento de estas propiedades y la aplicación de las mismas son básicos en el estudio de las matemáticas y necesario para el estudio de matemáticas más avanzadas. Concluiremos la actividad repasando la resolución de problemas verbales y el uso sistemático del método de Polya para lograrlo.

A través de la capacitación estaremos integrando la calculadora gráfica como herramienta útil en el aprendizaje de las matemáticas.





### **Glosario:**

Conjunto – Colección bien definida de objetos.

Números naturales –  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Números cardinales –  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Números enteros –  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Plausibilidad de una solución – Cuando la solución que se obtiene al resolver un problema aparenta ser correcta.

### **Materiales y equipo:**

1. papelotes
2. marcadores
3. cinta adhesiva
4. calculadoras gráficas *TI-84 Plus*
5. computadora
6. proyector digital (*Infocus*)

### **Proceso Educativo:**

- I. Pre y Pos prueba
  1. Se evaluará el conocimiento de los participantes antes de la capacitación con la Preprueba y el conocimiento después con la Posprueba (documentos adjuntos).
- II. Assessment Continuo
  1. Obviamente la preprueba y la posprueba son parte del assessment de la capacitación. Es la primera ayuda al capacitador para tomar decisiones acerca del conocimiento que tiene el participante del tema y de las próximas actividades que llevará a cabo. Mientras la posprueba ayuda al capacitador a tomar decisiones de la necesidad de re enseñanza en próximas capacitaciones.
  2. Las hojas de trabajo, el capacitador las utilizará como assessment. Los participantes estarán cotejando su aprendizaje en la medida que se discutan las mismas en grupo grande. Además, el capacitador las corrige y las utilizarlas para tomar decisiones.
  3. Durante todas las actividades el capacitador estará haciendo observaciones mientras se mueve entre las parejas, cuando los participantes discuten con su pareja y cuando presentan sus respuestas a las preguntas. Esto le permite hacer conclusiones del aprendizaje de éstos y los próximos pasos a seguir.



### III. Inicio: *Explorando las concepciones previas*

1. La actividad está diseñada para indagar el conocimiento que tienen los participantes acerca del conjunto de los números enteros, sus propiedades y el orden operacional.
  - i. Se dividen los maestros en parejas y se entrega la **Hoja de Trabajo 1** (HT1).
  - ii. Se le pide que contesten las preguntas de la HT1 individualmente. Luego discuten sus contestaciones con la pareja, llegan a consenso, lo escriben en un papelote y lo pegan en la pared.
  - iii. Cada pareja presenta sus contestaciones en grupo grande. El capacitador y los participantes no pasarán juicio de las contestaciones. El capacitador estará observando las contestaciones e identificará concepciones erróneas, si las hay, para luego a través de la capacitación hacer énfasis en las mismas y corregirlas. En el cierre de la capacitación los participantes volverán a revisar la HT1 y harán los arreglos pertinentes. De esta forma tendrán la oportunidad de percatarse de los posibles errores y corregirlos, mientras el capacitador tendrá un assessment final.

### Desarrollo:

#### **Actividad 1**

1. El capacitador escribe en la pizarra la palabra **conjunto** y le pide a los participantes que mencionen lo primero que le viene a la mente al leerla. El capacitador discute con los participantes las diferentes concepciones que tienen del concepto.
2. Luego de la discusión llegan a una definición del concepto conjunto equivalente a la siguiente: *Un conjunto es una colección bien definida de objetos.*
3. El capacitador le pide a los participantes que mencionen tres ejemplos de conjunto numéricos. Luego de la discusión definen los siguientes conjuntos: Números Naturales =  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ; Números Cardinales =  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ; Números Enteros =  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

## Actividad 2

1. El capacitador discute con los participantes las cuatro operaciones básicas en los enteros y bajo cuáles de éstas el conjunto es cerrado. Un conjunto es cerrado bajo una operación si siempre que se operen dos elementos del conjunto el resultado también es elemento del conjunto. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales es cerrado bajo la suma pues siempre que sumamos dos números naturales el resultado es natural.

### Nota 1

*Desde el principio de la historia de las matemáticas ha quedado claro que la necesidad de contar fue la base para el desarrollo de sistemas de numeración; van desde los más sencillos, que utilizaban marcas, hasta los actuales sistemas posicionales. Una de las mayores ventajas de nuestro sistema actual es que los algoritmos para realizar cálculos son relativamente fáciles. Por ejemplo, cuando sumamos o restamos dos números en forma vertical, “los alineamos en columnas” de modo que los dígitos que representan el mismo valor posicional se combinen. Es posible que este procedimiento sea el único que usted haya utilizado al sumar o restar con lápiz y papel, sin embargo, existen métodos alternos para realizar cálculos (vea el libro **Matemática: razonamiento y aplicaciones** de Miller, Charles D., Heeren, Vern E. y Hornsby, John; Pearson.*

2. El capacitador le reparte a las parejas un grupo de tarjetas con diferentes propiedades de los números enteros y sus nombres (ver Anejo 1). Cada pareja deberá parear la propiedad con el nombre y dar un ejemplo de cada propiedad. Luego de 10 minutos se discute en grupo grande. El capacitador discutirá cada propiedad con los participantes y aclarará las dudas que surjan.
3. Se reparte la **Hoja de Trabajo 2** (HT2) y se discuten las instrucciones. En esta actividad los participantes, en parejas, identificarán las propiedades de los números enteros que justifican una serie de afirmaciones y explicarán porqué escogieron la propiedad. Luego de 20 minutos el capacitador discutirá cada ejercicio con los participantes y aclarará las dudas que surjan.

### PARA REFLEXIONAR

*Tome cualquier número de tres dígitos diferentes entre sí. Acomodemos en orden decreciente, y luego en orden creciente. Ahora reste el menor del mayor. Repita el proceso utilizando un 0 si es necesario en cada caso de que la diferencia consista de sólo dos dígitos. Por ejemplo, supongamos que escogió los dígitos 1, 4 y 8.*

$$\begin{array}{r} 841 \\ -148 \\ \hline 693 \end{array} \quad \begin{array}{r} 963 \\ -369 \\ \hline 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 954 \\ -459 \\ \hline 495 \end{array}$$

*Observe que al final hemos obtenido el número 495, y el proceso conducirá a 495 de nuevo. El número 495 se llama número de Kaprekar, y siempre se llegará a él si este proceso se sigue para tales números de tres dígitos.*

### Actividad 3

1. El capacitador presenta la siguiente expresión aritmética y pide que los participantes la resuelvan:  $15 + 4 \times 5$ . El capacitador utilizará este ejemplo para justificar la necesidad de que haya un orden en las operaciones; note que si suma primero y luego multiplica obtiene 95, pero si multiplica primero y luego suma obtiene 35. El capacitador pregunta por el orden operacional y permite que los participantes lo establezcan (en muchas ocasiones los estudiantes mencionan que la primera operación que se lleva a cabo es los paréntesis, debemos recordar que los paréntesis son signos de agrupación y no operaciones).

#### ORDEN OPERACIONAL

##### Sin no hay paréntesis:

**Primero:** Haga todas las **potencias** en el orden en que aparezcan de izquierda a derecha.

**Segundo:** Haga las **multiplicaciones o divisiones** en el orden en que aparezcan de izquierda a derecha.

**Tercero:** Haga las **sumas o restas** en el orden en que aparezcan de izquierda a derecha.

##### Si hay paréntesis:

**Primero:** Utilice las reglas anteriores dentro de cada conjunto de **paréntesis**. Comience con el conjunto más interno y trabaje hacia fuera.

#### Actividad 4

1. Se reparte la **Hoja de Trabajo 3** (HT3) y se discuten las instrucciones. En esta actividad los participantes individualmente utilizarán el orden operacional para resolver los ejercicios. Luego de 20 minutos, el capacitador discutirá cada ejercicio con los participantes y aclarará las dudas que surjan. Es importante discutir con los participantes la diferencia entre  $(-2)^2 = 4$  y  $-2^2 = -4$ .

##### Nota 2

*“La tecnología llegó para quedarse”, hace dos décadas, en un foro sobre el tema de la tecnología llevado a cabo en la UPR en Cayey, el autor de esta capacitación lo afirmaba. El tiempo le dio la razón, la mayoría de los profesionales de la educación, por no decir el 100%, utilizan algún tipo de las nuevas tecnologías en sus trabajos. Calculadoras gráficas, computadoras, “Infocus”, pizarras electrónicas y otros, son comunes en el escenario educativo en nuestro país.*

#### Actividad 5

1. El capacitador reparte el Anejo 2 y discute con los participantes las opciones aritméticas que tiene la calculadora gráfica, hasta la página cuatro del anejo. Luego le pide a los participantes que vuelvan a la HT3 y resuelvan los ejercicios con la calculadora gráfica, luego se discuten en grupo grande. El Anejo 2 es un manual en donde se describe cómo usar la calculadora gráfica para: efectuar operaciones aritméticas, trazar gráficas de funciones, editar tablas de datos y trazar gráficas de datos. En próximas capacitaciones se estarán discutiendo estos temas.

*“La resolución de problemas debe ser el foco central del programa de estudios de matemáticas. Como tal, ésta es una meta primaria de toda la instrucción matemática y una parte integral de toda actividad matemática. Resolver problemas no es tema por separado, sino un proceso que debe infiltrarse en todo el programa y proporcionar el contexto que permita aprender conceptos y habilidades”, NCTM, 1989.*

*“Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben concentrarse en la solución de problemas pertinentes a la realidad de los estudiantes, recalando el proceso que comienza desde la propia consideración del problema hasta la evaluación de las implicaciones que tiene la solución. Esta visión trasciende la mera acción de resolver y permite que la solución de problemas sea el medio para el desarrollo de conceptos, destrezas y actitudes.”, Marco Curricular Programa de Matemáticas, 2003.*

### Actividad 6

1. El capacitador plantea el siguiente problema y le pide a los participantes que lo resuelvan en parejas (Anejo 3): Josiel, Raúl y Edwin fueron a comer a un restaurante en Río Piedras y cada uno pagó \$20 por la comida. Cuando el mozo va a pagar la cuenta a la caja, el gerente se percató que el total de la cuenta eran \$55, les había cobrado de más. Le da \$5 al mozo y le indica que se los devuelva. El mozo, sin saber como dividir los \$5 en partes iguales, le da un dólar a cada uno y se queda con dos dólares. Más tarde en la noche, el mozo razona que cada uno de los clientes pagó \$19 (\$20 menos \$1 que él les devolvió). Dado que los \$57 que ellos pagaron más los \$2 que él retuvo suman \$59, se quedó pensando qué había pasado con el dólar perdido. ¿Puedes explicar lo que sucedió?
2. Luego de 20 minutos el capacitador discute con los participantes el proceso que utilizaron para resolver el problema.

#### Nota 3:

*George Polya, el autor del clásico How to Solve It, murió a la edad de 97, el 7 de septiembre de 1985. Originario de Budapest, Hungría, fue cuestionado en una ocasión sobre por qué a finales del siglo surgieron en ese país tantos buenos matemáticos. Respondió que fue porque la matemática es la ciencia más económica: no requiere ningún equipo costoso, solamente lápiz y papel. En otra ocasión, se cuenta que dijo: “Yo no fui lo suficiente listo para convertirme en físico, ni demasiado inteligente para ser filósofo, así que elegí las matemáticas”. Escribió en calidad de autor o coautor más de 250 artículos en muchos idiomas, además de un gran número de libros; también fue un brillante conferenciante y profesor. A pesar de su capacidad, es curioso que Polya nunca aprendiera a conducir un automóvil (La información se obtuvo del libro Matemática: Razonamiento y Aplicaciones escrito por Charles D. Miller, Vern E. Heeren y E. John Hornsby, JR (2006).*

3. El capacitador discute los cuatro pasos de Polya para resolver problemas (Ver Anejo 4);
  - i. **Entienda el problema.** Usted no puede resolver un problema si no entiende lo que se le pide encontrar. El problema debe ser leído y analizado cuidadosamente. Es probable que necesite leerlo varias veces. Después de que así lo haya hecho, pregúntese: “¿Qué debo encontrar?”
  - ii. **Formule un plan.** Hay muchas formas de atacar un problema y decidir qué plan es el apropiado. Véase la lista titulada “Estrategias sugeridas para la resolución de problemas”, para conocer algunos de los diferentes enfoques posibles.
  - iii. **Lleve a cabo el plan.** Una vez sepa cómo enfocar el problema, realice su plan. Usted puede correr hacia un “callejón sin salida” o por caminos con obstáculos imprevistos, pero sea persistente. Si es capaz de resolver un problema sin ningún esfuerzo, entonces esto no tiene mucho de problema, ¿o sí?



- iv. **Revise y compruebe.** Compruebe su respuesta para ver que ésta sea razonable. ¿Satisface las condiciones del problema? ¿Ha respondido usted a todas las preguntas que se hacen en el problema? ¿Puede resolver el problema de una manera diferente y alcanzar la misma respuesta?

4. Es importante que capacitador defina y discuta el concepto plausibilidad de la solución.

### Actividad 7

1. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 4 (HT4) y discute las instrucciones con los participantes. En esta hoja de trabajo hay varios problemas que los participantes deben resolver utilizando los cuatro pasos planteados por Polya. El capacitador elegirá, entre todos los problemas que hay en la HT4, los problemas que los participantes resolverán. Hay diferentes tipos de problemas con diferentes niveles de dificultad. Debemos dar el tiempo suficiente para cada problema elegido y se deben discutir en grupo grande.

## IV. Cierre

1. Retomar los papelotes utilizados en el inicio para reflexionar acerca de los aprendizajes en la capacitación (*assessment* final). Se le permite a los participantes que vuelvan a la HT1 y hagan los cambios que sean pertinentes. Se discute con los participantes los cambios propuestos y la razón por qué los hicieron.
2. Administrar la pos prueba para luego discutirla con los maestros participantes.

### Bibliografía:

Departamento de Educación (2003). *Currículo del Programa de Matemática*.

Departamento de Educación (2011). *Estándares de Contenido y Expectativas de Grado: Programa de Matemáticas*.

Miller, Charles D., Heeren, Vern E. y Hornsby, John (2006). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. Pearson, México.