

## GUIA DEL MAESTRO

**Título:** Familia de triángulos

**Autor:** Prof. Ermer O. Díaz Vélez

**Nivel:** 7- 9

**Conceptos principales:**

Clasificación de triángulos, características de los triángulos, suma de los ángulos interiores de un triángulo, altura, mediana, mediatriz, bisectriz.

**Objetivo:** Al finalizar la actividad el estudiante podrá clasificar los triángulos e identificar las características correspondientes de cada uno.

**Objetivos Específicos:**

**Durante la actividad, el estudiante:**

1. Construirá los diferentes tipos de triángulos e identificará sus características.
2. Demostrará el teorema de la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo.
3. Construirá la altura, mediana, mediatriz y bisectriz de cualquier triángulo utilizando compas y regla.
4. Identificará el ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro de un triángulo.
5. Identificará las características de los puntos y segmentos notables de todo triángulo.
6. Aplicará las características y propiedades de los puntos y segmentos notables del triángulo para resolver problemas de aplicación.

**Estándares:**

**ESTÁNDAR DE CONTENIDO 3: GEOMETRÍA**

**El estudiante es capaz de identificar formas geométricas, analizar sus estructuras, características, propiedades y relaciones para entender y descubrir el entorno físico.**

**9.0 Fórmula enunciados generales que relacionan figuras de dos y tres dimensiones usando sus características y propiedades.**

**G.FG.7.9.1** Fórmula enunciados generales que describen las propiedades de los círculos, polígonos, prismas, pirámides, conos, esferas y cilindros.

**10.0 Identifica, justifica y aplica las relaciones entre los ángulos al describir figuras geométricas.**

**G.FG.7.10.1** Desarrolla y sostiene argumentos convincentes relacionados con relaciones entre ángulos usando modelos y dibujos con y sin ayuda de la tecnología.

**G.FG.7.10.2** Identifica, establece y aplica las propiedades básicas asociadas con ángulos complementarios y ángulos formados por transversales que intersectan líneas paralelas.

**G.FG.7.10.3** Identifica, establece y aplica las propiedades de la suma de ángulos para los triángulos y otros polígonos.

**9.0 Utiliza una gran variedad de representaciones para describir figuras geométricas y analizar las relaciones entre ellas.**

**G.MG.8.9.1** Identifica y construye elementos básicos de figuras geométricas (alturas, bisectriz de ángulos, bisectriz perpendicular, radios u otros) usando compás, transportador u otras herramientas tecnológicas.

**11.0 Examina modelos elementales de geometrías no-euclidianas para comprender la naturaleza de los sistemas axiomáticos.**

**G.FG.8.11.1** Investiga las representaciones geométricas y las propiedades que no se encuentran en la geometría plana (por ejemplo, relaciones en la geometría de una esfera).

**5.0 Identifica figuras congruentes y justifica estas congruencias estableciendo condiciones suficientes y hallando las transformaciones que preservan la congruencia entre las figuras. Resuelve problemas que involucran la congruencia en una variedad de contextos.**

**G.TS.9.5.1** Analiza figuras en términos de sus simetrías por medio de los conceptos reflexión, rotación y traslación; y una combinación de éstas.

**G.FG.9.5.2** Compara y contrasta la igualdad, la congruencia y la semejanza.

**G.FG.9.5.3** Identifica, contrasta, diferencia y aplica las condiciones suficientes para la congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA, AAL, HL).

#### **ESTÁNDAR DE CONTENIDO 4: MEDICIÓN**

**El estudiante es capaz de utilizar sistemas, herramientas y técnicas de medición para establecer conexiones entre conceptos espaciales y numéricos.**

**15.0 Aplica los conceptos de perímetro, área de superficie y volumen para medir figuras.**

**M.TM.7.15.1** Investiga, establece conjeturas y aplica las fórmulas para determinar perímetro, área de figuras bidimensionales básicas (rectángulos, paralelogramos, trapecios, trapezoides, triángulos) y el área de superficie y el volumen de figuras tridimensionales (prismas, pirámides y cilindros). Investiga y describe la relación entre las medidas de las figuras tridimensionales y las medidas de las figuras bidimensionales relacionadas.

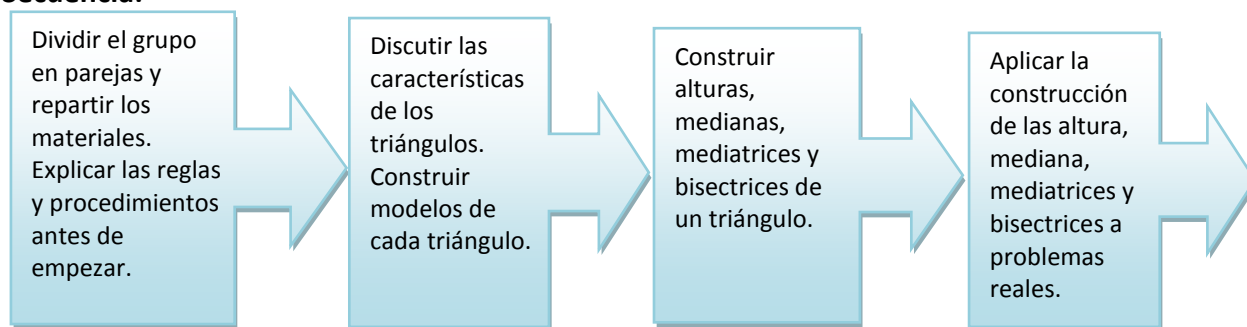
**M.TM.7.15.2** Estima y determina área de figuras irregulares planas; y el área de superficie de figuras tridimensionales descomponiendo estas figuras en figuras más sencillas.

## Materiales:

- ✓ Transportador
- ✓ Compás
- ✓ Regla
- ✓ Papel de construcción
- ✓ Tijeras
- ✓ Papel cuadriculado
- ✓ Cartón
- ✓ Pega
- ✓ Lápices de colores

## Introducción:

### Secuencia:



### Procedimiento:

- El maestro dividirá el grupo en parejas.
- Proveer a **cada pareja** de los materiales (papel de construcción, transportadores, compas, regla, lápices de colores, tijeras).

### Parte A: Exploración

1. El maestro solicitará a cada estudiante que construya dos triángulos según le hayan tocado en el sorteo. Maestro(a) utilizará las siguientes características para hacer el sorteo.
  - i. Tres lados iguales.
  - ii. Tres ángulos iguales.
  - iii. Dos lados iguales y un ángulo recto
  - iv. Dos lados iguales y un ángulo obtuso
  - v. Dos lados iguales y tres ángulos diferentes.

- vi. Dos lados iguales y tres ángulo agudos. (no se puede)
  - vii. Tres lados diferentes y un ángulo obtuso
  - viii. Tres lados diferentes y dos ángulos rectos (no se puede)
  - ix. Tres lados diferentes y un ángulo recto.
  - x. Tres lados diferentes y dos ángulos obtusos. (no se puede)
  - xi. Tres lados iguales y un ángulo recto. (no se puede)
2. El estudiante debe contestar las siguientes preguntas.
    - a. ¿Cómo construiste los triángulos?
    - b. ¿Cómo se llaman los triángulos que construiste?
    - c. ¿Qué otras características conoces de ellos?
    - d. Alguno de tus triángulo no se puede construir? ¿Por qué?
  3. Maestro(a) aclarará dudas y profundizará en las características de los triángulos. Recuerde enfatizar en la clasificación de los triángulos atendiendo la medida de los lados (equilátero, isósceles, escaleno) y la medida de los ángulos (acutángulo, rectángulo, obtusángulo).
  4. Recuerde que algunos de los triángulos no se pueden construir. Enfatice que el triángulo rectángulo – equilátero, equilátero – obtusángulo no se pueden construir.
  5. Debe dar énfasis a las características del triángulo equilátero e isósceles.
  6. Es importante enfatizar en la nomenclatura(nombres de los triángulos, letras mayúsculas)
  7. Maestro(a) debe definir de manera formal lo que es un triángulo.

Sugerencia: *“Un triángulo es un polígono de tres lados”*  
*“Figura plana cerrada de tres lados, tres ángulos y tres vértices”*  
*“Área limitada por tres rectas que se intersecan de dos a dos”*

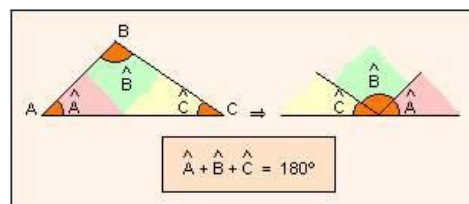
*(Def. Antonio Paz y Baldor Geometría Planas)*

## Parte B: Desarrollo

1. Es importante que el estudiante conozca las características de cada triángulo. Pero existen algunas que aplican a todos los triángulo. Una de esta es el teorema de los ángulos interiores de cualquier triángulo. Desarrolle la siguiente actividad con los estuantes. Recuerde que esta NO es una demostración formal de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ . Debe probarlo utilizando el postulado de las paralelas. Además, los maestros deben saber que la suma de los ángulos es  $180^\circ$  en la Geometría Euclidea, en la Geometría No Euclidea la suma es menor o igual a  $180^\circ$ .

Este hecho fue desarrollado por K.F. Gauss a principio del siglo XIX y fue la base de la Teoría de la Relatividad de Einstein, fue trascendental para la comunidad matemática.

- Solicite a cada estudiante que recorte un triángulo de cualquier tipo.
- Enumere los ángulos del triángulo recortado.
- Recorte los ángulos (no tiene que ser con tijeras)
- Intente colocar los ángulos uno al lado del otro. Pégalos en el recuadro que se provee a continuación y contesta las preguntas.



- ¿Qué dificultad tuviste para colocarlos?

*R: No quedaron totalmente juntos*

- ¿Qué tipo de ángulo forman los tres ángulos al alinearlos?

*R: ángulo llano o lineal*

- ¿Cuánto mide cada ángulo del triángulo que recortaste?

*R: Varios*

- ¿Cuánto mide la suma de los tres ángulos?

*R: 180°*

- ¿Qué relación existe entre la suma de los ángulos y el tipo de ángulo que se forma al alinearlos?

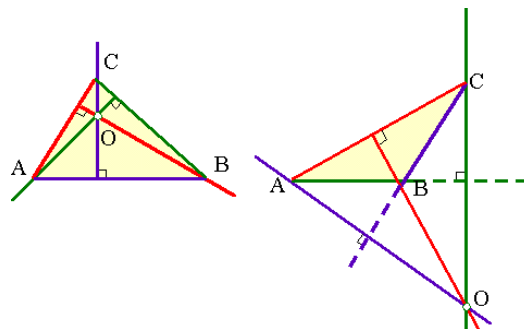
*R: La medidas son iguales*

- ¿Crees que esto ocurre para cualquier triángulo que recortes? Explica.

*R: Si. (Se debe demostrar de manera formal)*

- Los triángulos tienen otras características adicionales a la medida de sus ángulos y sus lados. Existen los segmentos y puntos notables del triángulo. A continuación maestro(a) debe solicitar a los estudiantes la construcción de las altura, mediana, mediatrices y bisectrices de cualquier triángulo. Esta sección estará dividida en cuatro partes. Es importante tomar el tiempo necesario para explicar la construcción de cada segmento.

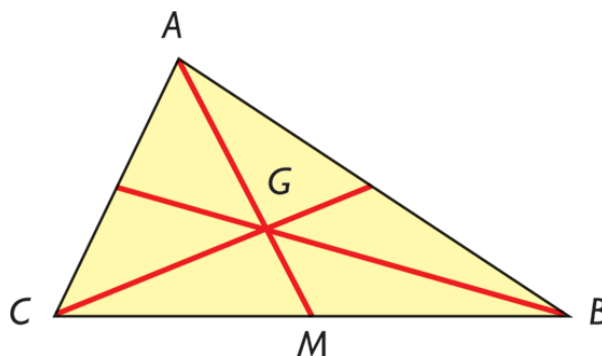
**Alturas:** La altura de un triángulo es el segmento trazado perpendicularmente desde cada vértice hasta el lado opuesto o su prolongación.



- Explique que esta construcción es igual a trazar la perpendicular a un segmento desde un punto exterior. (Ver anejo de construcciones).
- Solicite a cada estudiante que dibuje un triángulo cualquiera en un papel en blanco.
- Explique la construcción de una altura. Recuerde que en ocasiones es necesario prolongar el lado opuesto del vértice seleccionado.
- Después de verificar que todos los estudiantes pueden trazar una altura, solicite que trace las otras dos alturas del triángulo.
- Pregunte a los estudiante;
  - ¿Qué sucedió al trazar las tres alturas?  
*R: Se intersecaron en un punto.*
  - ¿Sabes cómo se llama el punto de intersección de las tres alturas?  
*R: Ortocentro*
  - Si construyes un triángulo rectángulo y trazas las tres alturas, ¿Donde se encontraran? ¿Por qué cree que sucede esto?  
*R: En el vértice del ángulo recto.*
  - Si tienen un triángulo obtusángulo, ¿En dónde crees se encontrarán las altura?  
*R: En el exterior del triángulo.*

v. Resume tus hallazgos con relación a las alturas de un triángulo.

**Mediana:** La mediana de un triángulo es el segmento trazado desde el vértice al punto medio del lado opuesto.



- Explique que esta construcción se puede realizar hallando el punto medio de un segmento. (Ver anejo de construcciones).
- Solicite a cada estudiante que construya un triángulo ABC en un papel en blanco.
- Explique la construcción de una mediana.
- Después de verificar que todos los estudiantes pueden trazar una mediana, solicite que trace las otras dos medianas del triángulo. Solicite que las identifique como las medianas AM, BN y CP
- Pregunte a los estudiante;
  - ¿Qué sucedió al trazar las tres medianas?  
*R: Se intersecaron en un punto.*
  - ¿Sabes cómo se llama el punto de intersección de las tres medianas?  
*R: Baricentro*
  - Si construyes un triángulo rectángulo y trazas las tres medianas, ¿Dónde se encuentra el punto de intersección de las medianas? ¿y en un triángulo obtusángulo?  
*R: Siempre en el interior del triángulo.*
  - Identifica el punto de intersección de las medianas con la letra O. Mide los siguientes segmentos y completa la tabla a continuación. Halla la razón de los segmentos como un decimal.



Mediana AM	Segmento AO	Segmento OM	Razón $\frac{AO}{AM}$	Razón $\frac{OM}{AM}$

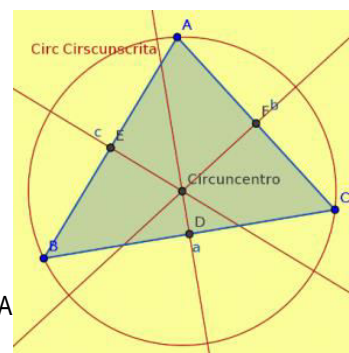
Mediana BN	Segmento BO	Segmento ON	Razón $\frac{BO}{BN}$	Razón $\frac{NM}{BN}$

Mediana CP	Segmento CO	Segmento OP	Razón $\frac{CO}{CP}$	Razón $\frac{OP}{CP}$

- v. ¿Qué relación existe entre la distancia del baricentro al vértice y la longitud de la mediana correspondiente?  
*R: Es 2/3 partes de la mediana*
- vi. ¿Qué relación existe entre la distancia del baricentro al punto medio y la longitud de la mediana correspondiente?  
*R: Es 1/3 parte de la mediana*
- vii. ¿Estas relaciones aplicaran a todos los triángulos? Explica.

**Recuerde:** La distancia del baricentro a cada vértice es dos terceras partes de la mediana. Y el segmento desde el baricentro al punto medio de cada lado es una tercera parte de la mediana.

**Mediatriz:** La mediatriz es el segmento o recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento. Este segmento también se conoce como la bisectriz perpendicular de un segmento.



- a. Explique que esta construcción se puede realizar trazando la perpendicular por el punto medio de un segmento (*Ver anejo de construcciones*).
- b. Solicite a cada estudiante que construya un triángulo ABC en un papel en blanco.
- c. Explique la construcción de una mediatriz.
- d. Después de verificar que todos los estudiantes pueden trazar una mediatriz, solicite que trace las otras dos mediatrices del triángulo. Solicite que las identifique como las mediatrices l, m, n.
- e. Pregunte a los estudiante;
  - i. ¿Qué sucedió al trazar las tres mediatrices?  
*R: Se intersecaron en un punto*
  - ii. ¿Sabes cómo se llama el punto de intersección de las tres mediatrices?  
*R: Circuncentro*
  - iii. Si construyes un triángulo obtusángulo y trazas las tres mediatrices, ¿Dónde se encuentra el punto de intersección de las mediatrices? ¿y en un triángulo rectángulo?  
*R: En el exterior.*  
*R: En el punto medio de la hipotenusa*
  - iv. Identifica el punto de intersección de las mediatrices con la letra O.  
Mide los siguientes segmento y completa la tabla a continuación:

Segmento AO	Segmento BO	Segmento CO

- v. ¿Qué relación existe entre la distancia del circuncentro y los vértices?  
*R: El Circuncentro equidista de los vértices*

vi. ¿Esta relación aplicará a todos los triángulos? Explica.

*R: Si.*

vii. ¿Podrás trazar una circunferencia que pase por los tres vértices?

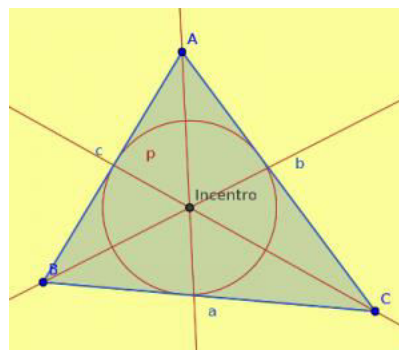
Explica.

*R: Si ya que el radio de una circunferencia puede incluir a los tres vértices.*

**Recuerde:** El circuncentro equidista a cada uno de los vértices. El circuncentro es el centro de una circunferencia circunscrita.

**Bisectriz:** La bisectriz de un ángulo es la semirecta que divide al ángulo en dos ángulos congruentes.

- Explique que esta construcción se puede realizar trazando la bisectriz de un ángulo (*Ver anejo de construcciones*).
- Solicite a cada estudiante que construya un triángulo ABC en un papel en blanco.
- Explique la construcción de una bisectriz.
- Después de verificar que todos los estudiantes pueden trazar una bisectriz, solicite que trace las otras dos bisectrices del triángulo. Solicite que las identifique como las bisectrices p , q , r.
- Pregunte a los estudiante;
  - ¿Qué sucedió al trazar las tres bisectrices?
  - ¿Sabes cómo se llama el punto de intersección de las tres bisectrices?
  - Mide la distancia del incentro a cada lado del triángulo. Recuerda que la distancia más corta entre un punto y un segmento es el segmento perpendicular que los une. Contesta: ¿Cómo comparan estas distancias?
  - Intenta dibujar una circunferencia inscrita.



### Parte C: Aplicación

En esta sección los estudiantes estarán resolviendo algunos problemas de aplicación aplicando lo aprendido sobre los puntos y segmentos notables de los triángulos.

- a. En este primer problema el estudiante determinará la longitud (escala) de la altura de la torre de pisa en Italia. Discuta con los estudiantes la **HOJA DE TRABAJO # 1**.
- b. El segundo trabajo permitirá crear un móvil de triángulos. Divida a los estudiantes en grupos de tres. Solicite que construyan cada uno tres triángulo y que hallen el baricentro. Luego deberán recortar y pegar los triángulos en cartón. A la vez recortaran el cartón con la silueta del triángulo pegado. Harán un pequeño orificio por le baricentro y construirán el móvil. Pueden colorear y decorar los triángulos.
- c. En el tercer problema aplicaran las mediatrices para hallar el arco que mejor resuelve el problema. La situación trata sobre un proyecto de ingeniería, específicamente la canalización de un río. El problema trata de visualizar el perfil de un río en su estado natural el cual se debe canalizar. Los ingenieros desean una estructura circular (arco) que afecte lo menos posible el contorno del río. Los estudiantes trazarán las mediatrices y hallaran el circuncentro. Trazarán el arco y sombrarán las áreas de corte y relleno. El estudiante relazará la tarea con las especificaciones de la **HOJA DE TRABAJO #2**.
- d. El cuarto problema trata sobre arquitectura. Muchos arquitectos crean figuras geométricas para hacer agradable a la vista muchas estructuras. En este caso el estudiante arquitecto debe trazar una circunferencia inscrita según las especificaciones que se presentan en la **HOJA DE TRABAJO #3**.



**Cierre:**

Reparta la actividad ***“EXPLORANDO EL TRIÁNGULO DE LA BERMUDAS”***. Discuta con los estudiantes los resultados. Verifique que los estudiantes puedan construir las medianas y las mediatrices. Puede reforzar la diferencia entre ellas y las características discutidas durante las actividades anteriores.



## FAMILIA DE TRIÁNGULO

### Hoja de auto cotejo

Criterio	Si	No
1. Construye correctamente los triángulos de acuerdo sus características.		
2. Clasifica correctamente los triángulos de acuerdo a sus características.		
3. Identifica que triángulos no se pueden construir.		
4. Utiliza correctamente el compás y la regla para las construcciones.		
5. Demuestra el teorema de la suma de los ángulos interiores y lo aplica.		
6. Construye correctamente las alturas de un triángulo		
7. Identifica el ortocentro de un triángulo.		
8. Determina la localización del ortocentro de acuerdo al tipo de triángulo.		
9. Construye las medianas correctamente.		
10. Identifica el baricentro de cualquier triángulo		
11. Determina la relación entre las distancias del baricentro, el vértice y el punto medio del segmento.		
12. Construye correctamente las mediatrices.		
13. Identifica el circuncentro de cualquier triángulo		
14. Determina la localización del circuncentro de acuerdo al tipo de triángulo.		
15. Traza la circunferencia circunscrita del triángulo.		
16. Construye correctamente las bisectrices.		
17. Identifica el incentro de cualquier triángulo		
18. Traza la circunferencia inscrita del triángulo.		

### Hoja reflexiva (KWL)

Conocía del tema...	Hoy aprendí...	Me gustaría aprender más sobre

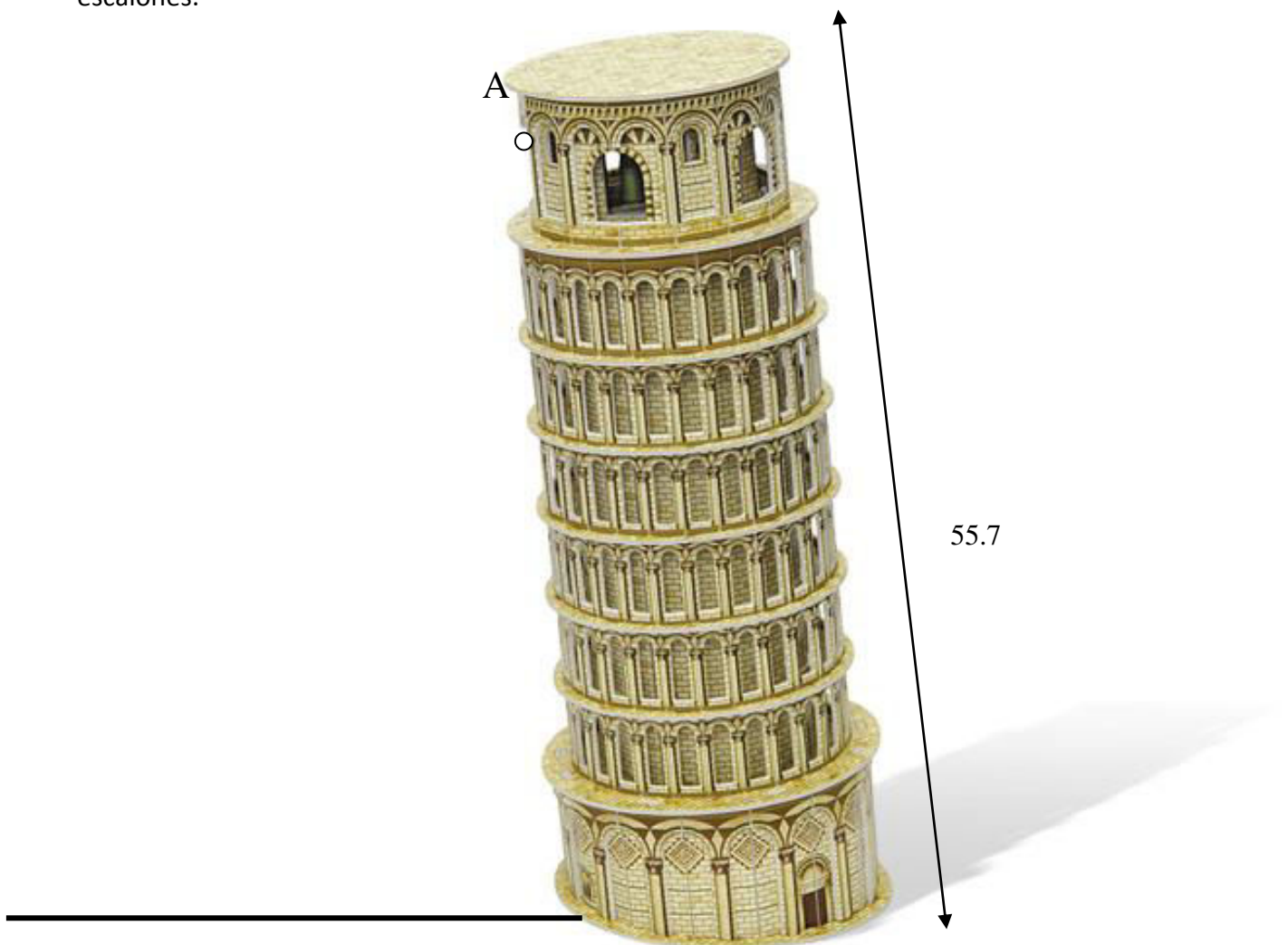
ANEJO DE TARJETAS

Tres lados iguales.	Tres lados diferentes y un ángulo obtuso
Tres ángulos iguales.	Tres lados diferentes y dos ángulos rectos
Dos lados iguales y un ángulo recto	Tres lados diferentes y un ángulo recto.
Dos lados iguales y un ángulo obtuso	Tres lados diferentes y dos ángulos obtusos.
Dos lados iguales y tres ángulos diferentes.	Tres lados iguales y un ángulo recto.
Dos lados iguales y tres ángulo agudos.	



## HOJA DE TRABAJO #1 ALTIURA DE LA TORRE DE PISA

La Torre de Pisa o Torre inclinada de Pisa es el campanario de la catedral de Pisa. Fue construida para que permaneciera en posición vertical pero comenzó a inclinarse tan pronto como se inició su construcción en agosto de 1173. La altura de la torre es de 55.7 metros desde la base, su peso se estima en 14.700 toneladas y la inclinación de unos  $4^\circ$  extendiéndose 3,9 m de la vertical. La torre tiene 8 niveles: una base de arcos ciegos con 15 columnas, 6 niveles con una columnata externa y remata en un campanario. La escalera interna en espiral tiene 294 escalones.



**Reto:** Construye la altura real del punto A de la torre inclinada de Pisa. Determina a qué distancia se encuentra la base de la torre de la base de la altura del punto A.



**CENTROS DE EXCELENCIA EN CIENCIAS Y MATEMATICAS (ALACiMa²)**  
**Fase 2**

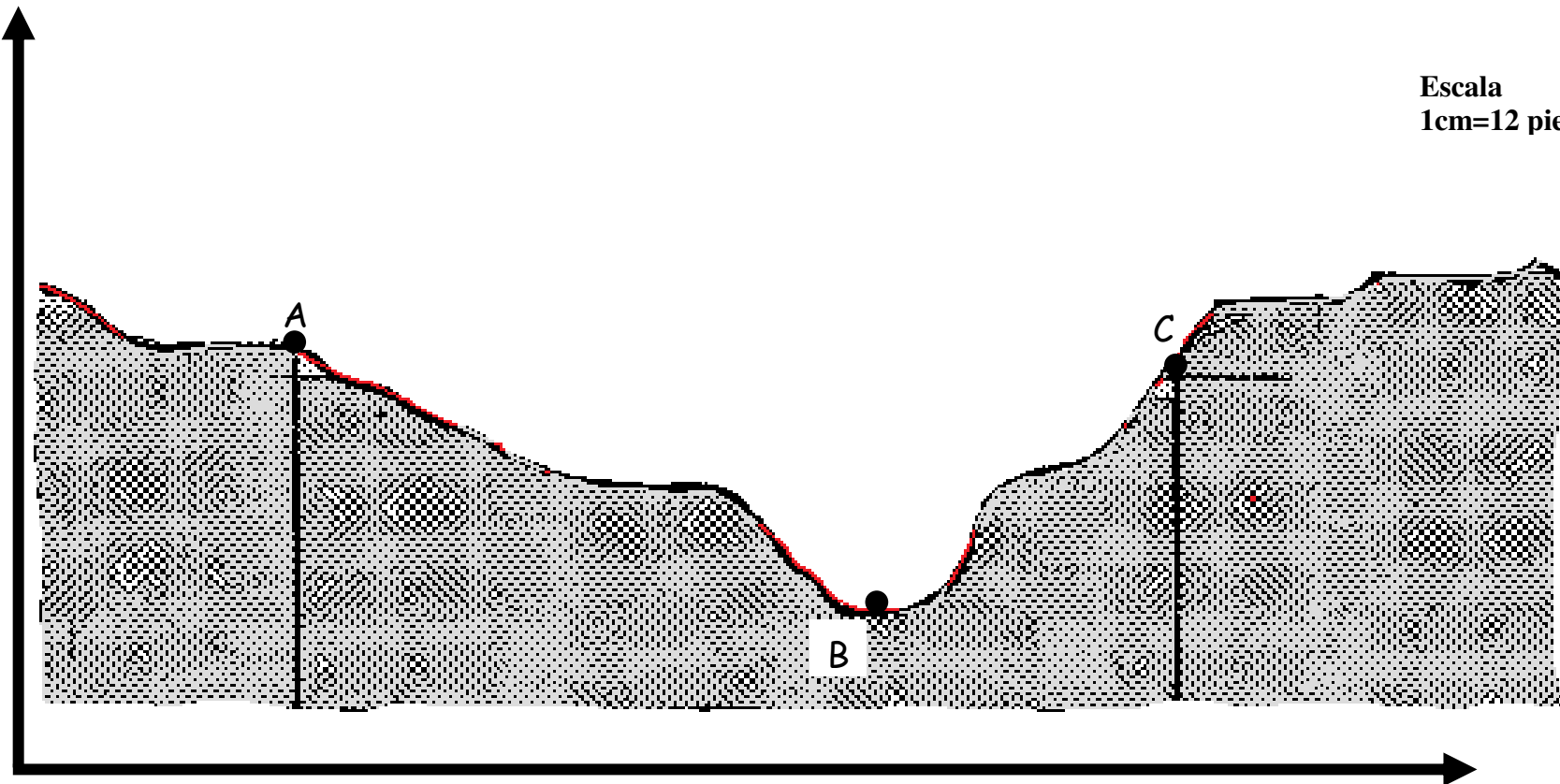


Proyecto sufragado por el Departamento de Educación mediante el programa: Título II Parte A: "Improving Teacher Quality State Grant"

## HOJA DE TRABAJO #3

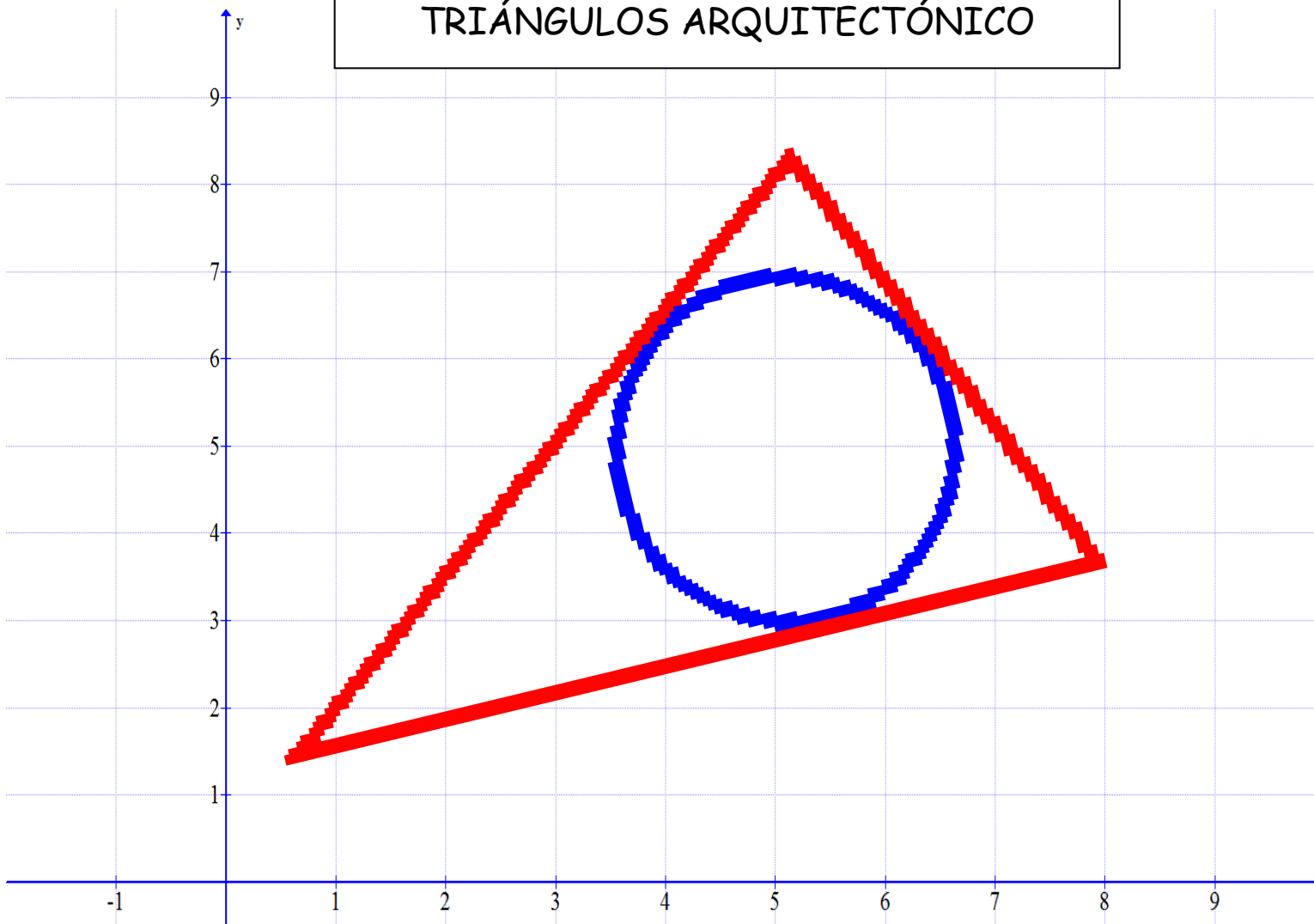
### Canalizando el río

Escala  
1cm=12 pies



La compañía de ingeniería ALACMA CONSTRUCTION tiene planificado canalizar el río. A continuación se presenta el perfil de una de las secciones del río. Tu labor será construir el arco que una los puntos A, B y C de manera que la canalización afecte lo menos posible el estado natural del río. Estima el área de tierra que debe removerse y determina el centro de la circunferencia.

HOJA DE TRABAJO #4  
TRIÁNGULOS ARQUITECTÓNICO



¿Cuál es la coordenada del centro de la circunferencia inscrita?

## EXPLORANDO EL TRIÁNGULO DE LAS BERMUDAS



En el triángulo del mapa, dibuja los segmentos RN, PM y QT.

Si los puntos M, N y T bisecan los segmentos que los contiene, ¿Cómo se conocen los segmentos PM, RN y QT? \_\_\_\_\_

¿Cómo se llama el punto donde se intersecan estos segmentos?

\_\_\_\_\_

¿Cómo se llama el punto que equidista de los vértices del triángulo?

\_\_\_\_\_

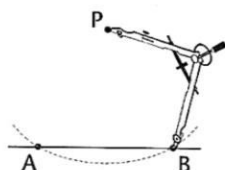
Utiliza el compás y la regla para hallar el punto que equidista de los vértices del TRIÁNGULO DE LAS BERMUDAS.

## ANEJOS DE CONSTRUCCIONES

### Construcción para la altura de un punto

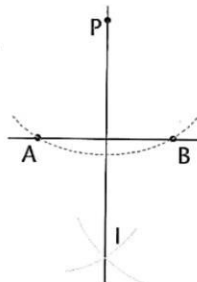
#### PASO 1

Comienza con una línea y un punto. Identifica ese punto como P y coloca en él la punta del compás. Abre el compás de modo que puedas dibujar un arco que interseque la línea dada en dos puntos. Llama a esos puntos A y B.



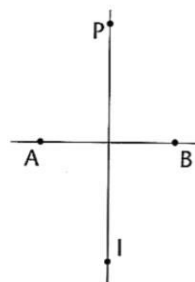
#### PASO 2

Coloca la punta del compás en el punto A y dibuja un arco en el lado opuesto de la línea donde se encuentra el punto P. Haz lo mismo para el punto B. Los dos arcos deben intersectarse. Llama a esa intersección punto I.



#### PASO 3

La línea PI es la perpendicular a la línea AB, que pasa por el punto P.



### Construcción para el punto medio o mediatriz de un segmento

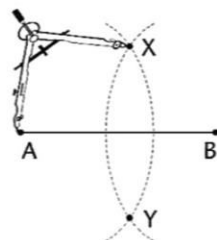
#### PASO 1

Comienza con un segmento dado e identifica sus puntos extremos como A y B. Coloca el compás con una abertura mayor que la mitad de AB.



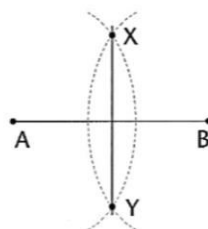
#### PASO 2

Coloca la punta del compás en el punto A y dibuja un arco que interseque AB. Haz lo mismo en el punto B, sin cambiar la abertura del compás. Llama a esos puntos de intersección X y Y.



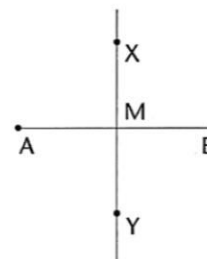
#### PASO 3

Dibuja un segmento de línea de X a Y.



#### PASO 4

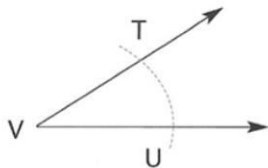
Identifica como M el punto donde el nuevo segmento interseca a AB. M es el punto medio del segmento AB. Además, el segmento XY es perpendicular al segmento AB.



## Construcción para la bisectriz de un ángulo

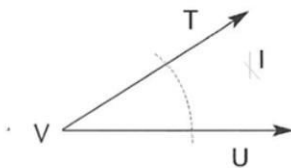
### PASO 1

Coloca la punta del compás en el vértice del ángulo dado y dibuja un arco que interseque ambos lados. Identifica el vértice como V y los dos puntos de intersección, T y U.



### PASO 2

Coloca la punta del compás en el punto T y dibuja un arco en el interior de  $\angle TVU$ . Luego, repite el proceso con U. Asegúrate de que los dos arcos se intersecten. Identifica esa intersección como punto I.



### PASO 3

Dibuja un rayo desde V hasta I. El rayo VI biseca  $\angle TVU$ .

