



Título de la actividad: El Círculo Unitario y las razones trigonométricas

Nivel: Superior

Grado: Undécimo

Concepto principal: círculo unitario, razones trigonométricas y teorema de Pitágoras

Conocimiento previo: triángulo, triángulo rectángulo, radianes, ángulos, longitud de arco, razones trigonométricas, teorema de Pitágoras, ángulo de referencia

Objetivos específicos de aprendizaje: Al finalizar la lección,

- reconocerá la relación de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo con los valores de las funciones trigonométricas

- reconocerá la relación existente entre el seno y el coseno de los ángulos de un triángulo rectángulo usando un círculo unitario.

- resolverá ejercicios donde encontrará las coordenadas en un círculo unitario para unos ciertos ángulos y usando los valores de los ángulos encontrar en qué cuadrante están situados, y el signo que les pertenece.

- reconocerá que, por semejanza, las razones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo son una propiedad de los ángulos del triángulo rectángulo.

- hallará los valores de las funciones trigonométricas de los diferentes ángulos.

Estándar: Geometría

Expectativas: El estudiante es capaz de identificar formas y dimensiones geométricas, y utilizar el conocimiento espacial para analizar sus estructuras, características, propiedades y relaciones para entender y descubrir el entorno físico.

Materiales: regla, tijeras, transportador, compás, papel cuadriculado, lápices a colores, un serafín, hojas de actividades, programado de Geogebra, computadora

Actividades:

Exploración

Se realizará una actividad de introducción a la destreza utilizando el Programado de Geogebra.

Actividad

Introducción a las actividades

En esta secuencia se abordarán los siguientes temas: interpretación de la definición de radián; expresión de ángulos en grados y radianes; conversión; y el uso del programa GeoGebra.

El programa se puede conseguir en <http://www.geogebra.org/cms/en/>





Objetivos de las actividades

Promover la discusión y el intercambio de diversas estrategias entre pares.

Promover el trabajo colaborativo, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los alumnos y el rol del docente como orientador y facilitador del trabajo.

Instrucciones

Pídanles a sus alumnos que se reúnan de a dos o de a tres para discutir ideas, aunque cada integrante trabajará con su equipo portátil.

Indíquenles que para realizar la actividad usarán el programa GeoGebra y el procesador de textos –para responder las preguntas que se formulan–. Deberán tener los dos programas abiertos.

1) Abran el procesador de textos y expliquen con sus palabras qué es un radián. Pueden buscar en Internet o en otras fuentes.

2) Ahora van a realizar una construcción que permita ver cómo se relacionan diversos arcos de una circunferencia con el radio. Sigán los pasos que se indican a continuación:

- Abran el programa GeoGebra, habiliten la vista de los ejes y de la cuadrícula.
- Marquen el punto de intersección entre los ejes y llámenlo **O**.
- Marquen un punto cualquiera sobre el eje **x**.
- Tracen una semirrecta de origen **O** que pase por el punto que marcaron.
- Hagan que el punto que marcaron no se vea.
- Marquen un punto cualquiera de la semirrecta y llámenlo **P** (comprueben que pueden deslizarlo sobre ella).
- Tracen una circunferencia de centro **O** que pase por **P**.
- Tracen el segmento **OP** y llámenlo **Radio**. Hagan que muestre su nombre y su valor, asígnenle un color que se destaque y denle mayor grosor.
- Marquen un punto cualquiera sobre la circunferencia y llámenlo **C** (comprueben que pueden deslizarlo sobre ella).
- Tracen la semirrecta de origen **O** que pase por **C**.
- Tracen el ángulo **POC**. Dejen el nombre α , píntenlo de algún color que les guste y hagan que muestre su nombre y su valor.
- Tracen el arco de centro **O** con extremos **P** y **C**. Llámenlo **Arco**, píntenlo de algún color que se destaque y hagan que muestre su nombre y su valor. Pueden hacerlo de mayor grosor.
- Inserten un texto que muestre la relación entre el arco y el radio. Para ello, escriban esto (pueden copiar y pegar):
“arco / radio =” + arco +” /” + radio +” =” + (arco / radio).

3) Ya tienen todo listo. Muevan ahora el punto **C** para hacer variar el ángulo, y el punto **P**, para aumentar o disminuir el radio de la circunferencia. Observen con atención lo que sucede y respondan estas preguntas debajo de la explicación que dieron en el punto 1:

- a) Si el radio es 2, ¿para qué ángulo el arco también mide 2?
- b) Si el radio es 3, ¿para qué ángulo el arco también mide 3?





- c) ¿Y si el radio es 1?
 - d) ¿Cuántos grados mide un radián?
 - e) ¿Qué medida tiene el arco cuando el radio es 1 y el ángulo es de 180° ?
 - f) ¿Cuántos grados mide el ángulo cuando el radio es 1 y el arco mide 2π ?
- 4) Guarden ambos archivos con el nombre “Grados y radianes 1”.

Actividad 2

Indíquenles a sus alumnos que, de ser posible, se agrupen de la misma forma que cuando realizaron la actividad 1.

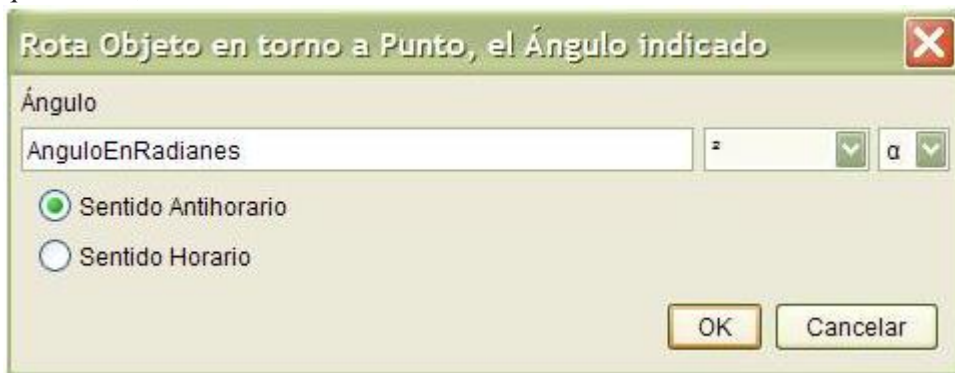
1) Ahora van a trabajar con una **circunferencia trigonométrica**. Abran el programa GeoGebra y sigan estos pasos:

- Habiliten la vista de los ejes y de la cuadrícula.
- Marquen el punto de intersección entre los ejes y llámenlo **O**.
- En el campo de entrada, escriban: $A = (1,0)$, para marcar un punto **A** con esas coordenadas.
- Tracen una semirrecta de origen **O** que pase por **A**.
- Marquen un punto cualquiera sobre la semirrecta, llámenlo **P** (comprueben que pueden deslizarlo sobre la semirrecta) y píntenlo de rojo.
- Tracen una circunferencia de centro **O** y radio 1.
- Para determinar los distintos valores que toma la abscisa del punto **P** cuando este se mueve, en el campo de entrada, escriban: $x(P)$.
- Llámelo **Angulo En Radianes**.
- Ahora van a hacer que el punto **A** rote sobre la circunferencia en sentido anti horario según el ángulo en radianes. Para ello, usen la herramienta que se muestra a continuación.





Señalen el punto **A** (objeto a rotar), luego el punto **O** (centro de rotación) y por último, en la ventana que se abre, escriban:

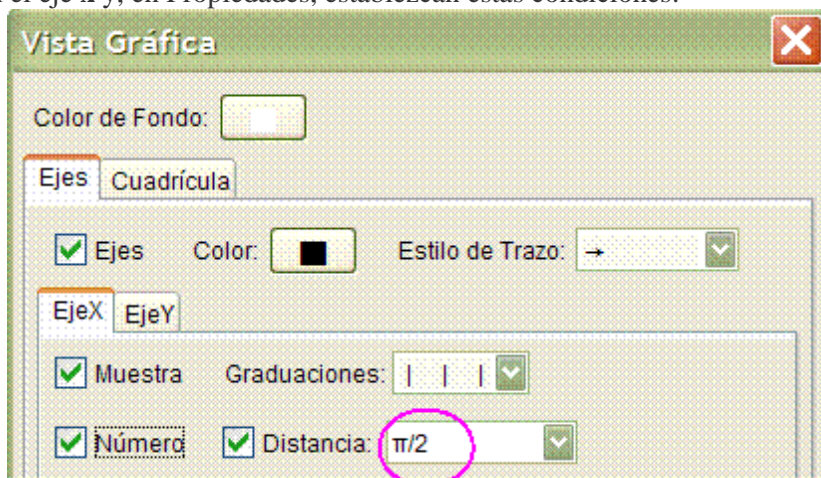


Verán que aparece un punto **A'** sobre la circunferencia. Comprueben que a medida que mueven **P**, el punto **A'** va girando. Píntenlo de un color que se destaque.

- Tracen el ángulo **AOA'**, y dejen que muestre su nombre α , pero no su valor. En Propiedades, elijan este tipo de decoración para indicar que el ángulo aumenta en sentido antihorario:



- Tracen el segmento **OA'** y píntenlo del mismo color que el ángulo α .
- Cambien la escala del eje **x**, de modo que muestre los valores como fracciones de π . Para ello, señalen el eje **x** y, en Propiedades, establezcan estas condiciones:



- Inserten un texto que muestre la medida del ángulo α en radianes y en grados. Para ello, escriban esto (pueden copiar y pegar):





$$“\alpha = ” + \text{Angulo En Radianes} + ” \text{radianes} = ” + (\text{Angulo En Radianes } 180 / \pi) + “^{\circ}”$$

2) Ya tienen todo listo. Muevan el punto **P**, observen qué va sucediendo, y respondan estas preguntas en el procesador de textos.

- a) ¿Cuántos radianes mide α cuando **P** coincide con el punto **A**?
- b) Respondan con fracciones de π : ¿cuántos radianes mide un ángulo de 90° ? ¿Y uno de 180° ? ¿Y uno de 270° ?
- c) ¿Cuántos grados mide un ángulo de 2π radianes?
- d) ¿Cuántos radianes le faltan a un ángulo de 2 radianes para ser llano?
- e) ¿Y a un ángulo de 5 radianes para ser de un giro?
- f) ¿Cuántos grados mide un ángulo de $(5\pi/2)$ radianes?
- g) ¿Cuántos radianes mide un ángulo de 630° ? Exprésenlo con un número real y mediante una fracción de π .
- h) ¿Por qué en el último ítem del punto 1, para mostrar la medida del ángulo en grados cuando está expresado en radianes, usaron esta fórmula:

$$\text{Angulo En Radianes} \cdot 180^{\circ} / \pi?$$

- i) ¿Qué fórmula usarían para obtener la medida de un ángulo en radianes cuando está expresado en grados?
 - j) ¿Cómo expresarían en radianes estos ángulos: 30° , 45° , 120° , 135° , 210° , 225° , 300° , 330° ? Usen fracciones de π .
 - k) ¿Es cierto que el lado terminal de los ángulos de 90° y $(9\pi/2)$ radianes coinciden? ¿Qué diferencia hay entre el mayor y el menor? Exprésenlo en función de π . ¿Cuántos giros representan esa diferencia?
 - l) Adrián afirma que si expresa un ángulo cualquiera en radianes y le suma $2 \cdot k \cdot \pi$, donde k es un número entero, el ángulo que resulte poseerá un lado terminal que coincida con el del ángulo original. ¿Es cierto? ¿Por qué?
- 3) Guarden el archivo de **GeoGebra** y el del procesador de textos con el nombre “**Grados y radianes 2**”.

Conceptualización

Se realizará un estudio, investigación y desarrollo de los conceptos de las razones trigonométricas.

Actividad #1

Los estudiantes trabajarán una actividad donde visualizarán la relación de las medidas de los ángulos trazados a través de un segmento con los valores de las funciones trigonométricas.

Actividad #2





Los estudiantes construirán un círculo unitario.

Actividad #3

Juntos como clase, completarán un círculo unitario en blanco en papel cuadriculado. Identificarán y discutirán los patrones en el círculo unitario como forma de ayudarles a los estudiantes a recordarlo. Los estudiantes como práctica en su casa completarán un círculo unitario en blanco tanto en radianes como en grados.

Actividad #4

Los estudiantes realizarán unos ejercicios de práctica donde encontrarán las coordenadas en un círculo trigonométrico y trazarán su gráfica, y usando los valores de los ángulos encontrarán el cuadrante donde se ubique.

Actividad #5

Los estudiantes jugarán al juego del recorrido de radianes para lograr su comprensión de las medidas de los ángulos en los radianes y las coordenadas correspondiente al círculo unitario.

Aplicación

Se realizarán unas actividades para fortalecer el conocimiento adquirido, clarificación de dudas y avalúo.

Actividad #1

Los estudiantes completarán el cuadrado trigonométrico donde aplicarán los valores trigonométricos de los ángulos comunes.

Actividad #2

Los estudiantes crearán un poema *cinquain* o canción sobre el círculo unitario.

Actividad #3

Los estudiantes resolverán un ejercicio de aplicación a la vida diaria.

Actividad #4

Los estudiantes contestarán una hoja de avalúo.

