DEMOSTRANDO TRIÁNGULOS

GUÍA DEL MAESTRO

MATERIA: Matemáticas **NIVEL:** 7-9
AUTOR: Prof. Josiel Rosado Tirado
CONCEPTO PRINCIPAL
- TRIÁNGULOS

CONCEPTOS SECUNDARIOS
- Teorema de Pitágoras
- Recíproca del teorema de Pitágoras
- Razones en triángulos rectángulos

OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Durante la capacitación los participantes:
1. Crean programas con la calculadora TI-84 para determinar con que longitudes se cumple el teorema de Pitágoras.
2. Realizan fórmulas de área de triángulos y área de cuadrados para demostrar el teorema de Pitágoras.
3. Utilizan rompecabezas geométricos para demostrar o comprobar el teorema de Pitágoras.
4. Analizan el inverso o reciproco del teorema de Pitágoras utilizando la aplicación Cabri Jr.
5. Clasifican los triángulos dadas las longitudes de sus lados.
6. Descubren las razones especiales (sen, cos, tan) en los triángulos rectángulos.
7. Resuelven triángulos rectángulos utilizando el teorema de suma de ángulos, desigualdades de triángulos, ángulo exterior, Pitágoras y las razones trigonométricas básicas.

ESTÁNDARES, EXPECTATIVAS E INDICADORES POR GRADO
Geometría: El estudiante es capaz de identificar formas geométricas, analizar sus estructuras, características, propiedades y relaciones para entender y descubrir el entorno físico.

Séptimo
10.0 RELACIONES ENTRE ÁNGULOS: Identifica, justifica y aplica las relaciones entre los ángulos al describir figuras geométricas.

G.FG.7.10.1 Desarrolla y sostiene argumentos convincentes relacionados con relaciones entre ángulos usando modelos y dibujos con y sin ayuda de la tecnología.

G.FG.7.10.2 Identifica, establece y aplica las propiedades básicas asociadas con ángulos complementarios, suplementarios y ángulos formados por transversales que intersecan líneas paralelas.

G.FG.7.10.3 Identifica, establece y aplica las propiedades de la suma de ángulos para los triángulos y otros polígonos.

11.0 TEOREMA DE PITÁGORAS: Explora y aplica el Teorema de Pitágoras para resolver problemas de medición.

G.FG.7.11.1 Explora el Teorema de Pitágoras al investigar los triángulos rectángulos, sus medidas y sus áreas.

G.FG.7.11.2 Aplica el Teorema de Pitágoras para resolver problemas.

Noveno
4.0 DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS: Aplica métodos matemáticos de prueba para desarrollar justificaciones para los teoremas básicos de la geometría euclidiana.

G.FG.9.4.1 Establece conjeturas basadas en la exploración de situaciones geométricas, con y sin tecnología.

G.FG.9.4.4 Organiza y presenta pruebas directas y pruebas indirectas utilizando dos columnas, párrafos y flujogramas.

Grado 10
11.0 TEOREMA DE PITÁGORAS: Demuestra y aplica el Teorema de Pitágoras y su recíproco.

G.FG.10.11.1 Prueba el Teorema de Pitágoras y su recíproco.

G.LR.10.11.2 Aplica el Teorema de Pitágoras en situaciones de dos y tres dimensiones.

***G.FG.10.12.2** Aplica las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para determinar medidas de los ángulos y las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.*

MATERIALES (por capacitador)

10 reglas
15 lápices de madera
5 paquetes de marcadores permanentes
5 rollos de tape transparente
10 tijeras
1 rollo de *masking* tape
20 calculadoras TI-84 con Cabri Jr.
20 Copias rompecabezas pitagórico papel cartón
30 bolsitas plásticas pequeñas 6" x 3" (ziploc)
5 cartulinas blancas

GLOSARIO

- **Ángulo** - Si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su unión es un *ángulo*. Los dos rayos se llaman los *lados* del ángulo y el extremo común se llama el *vértice*. Si los rayos son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, entonces el ángulo se indica con $\angle BAC$ o con $\angle CAB$.
- **Triángulo** - Si *A*, *B* y *C* son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama *triángulo*, y se indica con ΔABC. Los puntos *A*, *B* y *C* se llaman *vértices*, y los segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llaman lados. Todo triángulo ΔABC determina tres ángulos: $\angle BAC, \angle ABC$ y $\angle ACB$. A éstos los llamamos los ángulos del ΔABC. Si está claro a qué triángulo nos referimos, frecuentemente podemos designarlos por $\angle A, \angle B$ y $\angle C$.
- **Conjetura** – Suposición informada. Es una afirmación que, al no haber sido probada pero tampoco refutada, se concibe como cierta. Sólo cuando se haya podido demostrar su veracidad, la conjetura pasará a ser un teorema.
- **Teorema** – Un enunciado, a menudo de carácter general, que puede ser demostrado apelando a postulados, definiciones, propiedades algebraicas y reglas de lógica.
- **Demostración** - Argumento lógico que muestra que la verdad de una hipótesis garantiza la verdad de la conclusión.
- **Razón trigonométrica –** una razón entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

TEOREMAS

- **Teorema de la suma de los ángulos:** La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.
- **Teorema del ángulo exterior:** La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos o interiores no adyacentes o remotos.

- **Teorema de la desigualdad triangular:** La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.
- **Teorema de Pitágoras:** En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.
- **Teorema reciproco o inverso del teorema de Pitágoras:** Si la suma de los cuadrados de las medidas de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado de la medida del lado más largo, entonces el triángulo es rectángulo.

TRASFONDO

El Estándar de Geometría presenta una amplia visión del poder de la geometría, el cual invita a los estudiantes a analizar características de las figuras geométricas y desarrollar argumentos acerca de las relaciones geométricas; así como a usar la visualización, el razonamiento espacial y los modelos geométricos para resolver problemas. La geometría es un área de las matemáticas que permite el desarrollo natural de las habilidades de razonamiento y justificación en los estudiantes.

El triángulo es la primera forma geométrica que estudiarás. Los triángulos son los polígonos más simples, pues constan tan sólo de tres lados y también de tres ángulos. De ahí su nombre de triángulo o trígono: Tri = tres; ángulo = ángulo; gono = lado. Los triángulos tienen una importancia suprema en la geometría, pues todo polígono puede ser descompuesto o formado por triángulos. Esta gran importancia de los triángulos en la geometría, ya la conocían los geómetras desde los tiempos de las primeras civilizaciones. El uso de esta forma tiene una larga historia. El triángulo juega un rol práctico en la vida de los antiguos egipcios y chinos como una ayuda para delimitar y medir tierras. Los triángulos en nuestro entorno, ha sido y es de gran importancia, entre ellas podemos recordar a las grandes pirámides de Egipto. También en las construcciones modernas, en los anuncios de seguridad vial, entre otros. Hoy en día, los triángulos son usados frecuentemente en arquitectura, agrimensura y otras áreas de nuestro diario vivir. El estudio de los triángulos es tan amplio, que ha generado en sí misma una rama de la Geometría y de las Matemáticas, es la Trigonometría.

Por ello es necesario que debamos aprender cuáles son sus elementos, su clasificación y propiedades fundamentales.

PROCESO EDUCATIVO

1. Administración pruebas

   a. Se evaluará el conocimiento de los participantes antes de la capacitación con la Preprueba y el conocimiento después con la Posprueba (documentos adjuntos).

2. Assessment Continuo

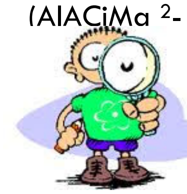
   a. Obviamente la preprueba y la posprueba son parte del assessment de la capacitación. Es la primera ayuda al capacitador para tomar decisiones acerca del conocimiento que tiene el participante del tema y de las próximas actividades que llevará a cabo. Mientras la posprueba ayuda al capacitador a tomar decisiones de la necesidad de re enseñanza en próximas capacitaciones.
   b. Las hojas de trabajo, el capacitador las utilizará como assessment. Los participantes estarán cotejando su aprendizaje en la medida que se discutan las mismas en grupo grande. Además, el capacitador las corrige y las utilizarlas para tomar decisiones.
   c. Durante todas las actividades el capacitador estará haciendo observaciones mientras se mueve entre las parejas, cuando los participantes discuten con su pareja y cuando presentan sus respuestas a las preguntas. Esto le permite hacer conclusiones del aprendizaje de éstos y los próximos pasos a seguir.

ACTIVIDAD DE INICIO: **EXPLORACIÓN DE LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS**

Esta actividad es una exploración con la que se pretende identificar las concepciones que tienen los maestros acerca del teorema de Pitágoras y de las estrategias que se utilizan en la sala de clase para enseñar este teorema.

Instrucciones:

1. Se formarán grupos de 4 ó 5 maestros y compartirán ideas acerca de la forma en que trabajan el teorema de Pitágoras con sus estudiantes y qué dificultades encuentran es sus estudiantes.
2. En un papelote(o cartulina) y con un marcador, escribirán los acuerdos de la discusión.
3. Dividirán el papelote en dos partes, en la primera mitad escriba ¿Cómo enseñan el teorema de Pitágoras? y en la otra mitad ¿Qué dificultades encuentras en tus estudiantes en el teorema de Pitágoras?
4. Pegarán el papelote en la pared para ser presentado al grupo. El papelote estará durante toda la capacitación pegado a la pared.



Actividad de inicio
“Exploración de la enseñanza del Teorema de Pitágoras”

Instrucciones:

1. Se formarán grupos de 4 ó 5 maestros y compartirán ideas acerca de la forma en que trabajan el teorema de Pitágoras con sus estudiantes y qué dificultades encuentran es sus estudiantes.
2. En un papelote(o cartulina) y con un marcador, escribirán los acuerdos de la discusión.
3. Dividirán el papelote en dos partes, en la primera mitad escriba ¿Cómo enseñan el teorema de Pitágoras? y en la otra mitad ¿Qué dificultades encuentras en tus estudiantes en el teorema de Pitágoras?
4. Pegarán el papelote en la pared para ser presentado al grupo. El papelote estará durante toda la capacitación pegado a la pared.

Anejo#1 “Exploración del Teorema de Pitágoras”

¿Cómo enseñan el Teorema de Pitágoras a sus estudiantes?	¿Qué dificultades encuentran en sus estudiantes en el Teorema de Pitágoras?

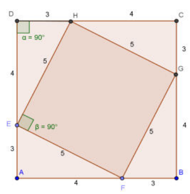
ACTIVIDAD #1A: DEMOSTRANDO EL TEOREMA DE PITÁGORAS CON FÓRMULAS DE ÁREA (HOJA DE TRABAJO # 1A)

El objetivo de esta actividad es utilizar las fórmulas de área para demostrar el teorema de Pitágoras. En esta primera parte se analizan las fórmulas aritméticamente y se establece que no hay evidencia suficiente para realizar alguna conjetura y menos para probar un teorema.

1. Se reparte la Hoja de Trabajo # 1A y se discuten las instrucciones con los participantes.

Instrucciones: Determina el área de los cuatro triángulos y los dos cuadrados (pequeño y grande). Luego suma el área de los cuatro triángulos y del cuadrado pequeño. Compara la suma de las áreas con el área del cuadrado grande. $Teorema\ de\ Pitágoras\ \ c^2 = a^2 + b^2$

$$área\Delta = \frac{b \times h}{2} \qquad\qquad área\blacksquare = l^2$$



$área\Delta EDH = 6u^2$

$área\Delta FAE = 6u^2$

$área\Delta FGB = 6u^2$

$área\Delta GHC = 6u^2$

$área\blacksquare EHGF = 25u^2$

$área\blacksquare ADCB = 49u^2$

Preguntas:

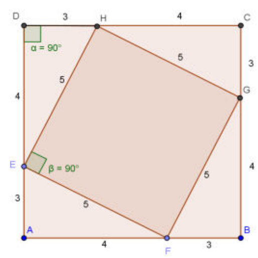
1. ¿Qué observas en las medidas de las áreas que hallaste? Las áreas de los triángulos son iguales
2. ¿Cómo se comparan estas medidas? Los 4 triángulos y el cuadrado pequeño miden lo mismo que el cuadrado grande.
3. ¿Crees que esto te ayuda a demostrar el teorema de Pitágoras? Explica. No hay suficiente evidencia.
4. ¿Cómo demostrarías el teorema de Pitágoras? Explica. Utilizando variables

2. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente.
3. En grupo grande se discutirá la Hoja de Trabajo #1A.

Hoja de trabajo #1A
"Demostrando el teorema de Pitágoras con fórmulas de área"

Instrucciones: Determina el área de los cuatro triángulos y los dos cuadrados (pequeño y grande). Luego suma el área de los cuatro triángulos y del cuadrado pequeño. Compara la suma de las áreas con el área del cuadrado grande. $Teorema\ de\ Pitágoras\ \ c^2 = a^2 + b^2$

$área\Delta = \frac{b \times h}{2}$ $\qquad$ $área\blacksquare = l^2$



$área\Delta EDH =$ _______ $\qquad$ $área\Delta FAE =$ _______
$área\Delta FGB =$ _______ $\qquad$ $área\Delta GHC =$ _______
$área\blacksquare EHGF =$ _______ $\qquad$ $área\blacksquare ADCB =$ _______

Preguntas:
1. ¿Qué observas en las medidas de las áreas que hallaste?
2. ¿Cómo se comparan estas medidas?
3. ¿Crees que esto te ayuda a demostrar el teorema de Pitágoras? Explica.
4. ¿Cómo demostrarías el teorema de Pitágoras? Explica.

ACTIVIDAD #1B: DEMOSTRANDO EL TEOREMA DE PITÁGORAS CON FÓRMULAS DE ÁREA PARTE 2 (HOJA DE TRABAJO # 1B)

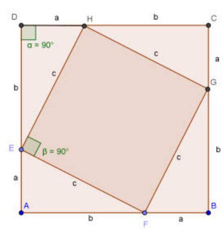
El objetivo de esta actividad es utilizar las fórmulas de área para demostrar el teorema de Pitágoras. En esta segunda parte se analizan las fórmulas algebraicamente y se establece una igualdad entre la suma de las fórmulas de área de los cuatro triángulos y el cuadrado pequeño con la fórmula de área del cuadrado grande, mediante procedimientos algebraicos se prueba el teorema de Pitágoras.

1. Se reparte la Hoja de Trabajo # 1B y se discuten las instrucciones con los participantes.

Instrucciones: Determina el área de los cuatro triángulos y los dos cuadrados (pequeño y grande), utilizando las variables. Luego suma el área de los cuatro triángulos y del cuadrado pequeño (recuerda utilizar un poco de álgebra). Compara la suma de las áreas con el área del cuadrado grande.

$Teorema\ de\ Pitágoras\ \ c^2 = a^2 + b^2$

$área\Delta = \frac{b \times h}{2}$ $\qquad$ $área\blacksquare = l^2$



$área\Delta EDH = \frac{ab}{2}$ $\qquad$ $área\Delta FAE = \frac{ab}{2}$

$área\Delta FGB = \frac{ab}{2}$ $\qquad$ $área\Delta GHC = \frac{ab}{2}$

$área\blacksquare EHGF = c^2$ $\qquad$ $área\blacksquare ADCB = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente.

3. En grupo grande se discutirá la Hoja de Trabajo #1B.

Preguntas:
1. ¿Qué observas en las medidas de las áreas que hallaste? Están en forma de fórmulas
2. ¿Cómo se comparan estas medidas? No se puede determinar
3. ¿Crees que esto te ayuda a demostrar el teorema de Pitágoras? Explica. Al utilizar algebra e igualar las fórmulas y eliminar las cantidades iguales en ambos lados de la igualdad, queda demostrado el teorema de Pitágoras.

4. ¿Crees que es importante que los estudiantes conozcan demostraciones como esta? Explica.
5. El capacitador presenta el teorema de Pitágoras.

   Teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Nota: Discuta la importancia de este tipo de demostraciones en los teoremas. Anime a los participantes a hablar de sus experiencias.

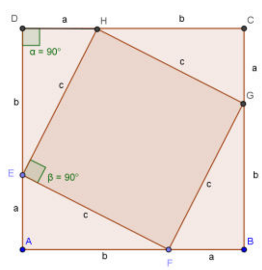
Hoja de trabajo #1 B

"Demostrando el teorema de Pitágoras con fórmulas de área PARTE 2"

Instrucciones: Determina el área de los cuatro triángulos y los dos cuadrados (pequeño y grande), utilizando las variables. Luego suma el área de los cuatro triángulos y del cuadrado pequeño (recuerda utilizar un poco de álgebra). Compara la suma de las áreas con el área del cuadrado grande.

$Teorema\ de\ Pitágoras\ \ c^2 = a^2 + b^2$

$área\Delta = \frac{b \times h}{2}$ $\qquad\qquad$ $área\blacksquare = l^2$



$área\Delta EDH =$ _______ $\qquad$ $área\Delta FAE =$ _______

$área\Delta FGB =$ _______ $\qquad$ $área\Delta GHC =$ _______

$área\blacksquare EHGF =$ _______ $\qquad$ $área\blacksquare ADCB =$ _______

Preguntas:

1. ¿Qué observas en las medidas de las áreas que hallaste?
2. ¿Cómo se comparan estas medidas?
3. ¿Crees que esto te ayuda a demostrar el teorema de Pitágoras? Explica.
4. ¿Crees que es importante que los estudiantes conozcan demostraciones como esta? Explica.

ACTIVIDAD #2: ROMPECABEZAS PITAGÓRICOS **(HOJA DE TRABAJO # 2)**

El objetivo de esta actividad es probar el teorema de Pitágoras mediante la construcción de unos rompecabezas con figuras geométricas. Una vez montados los rompecabezas utiliza un poco de algebra y listo, demostraste Pitágoras.

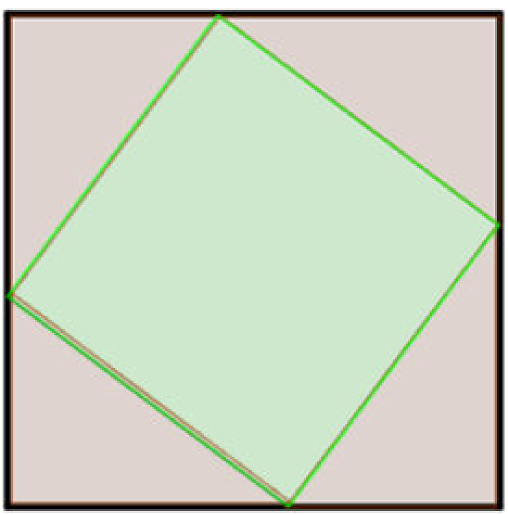
1. Se reparte la Hoja de Trabajo # 2 y se discuten las instrucciones con los participantes.

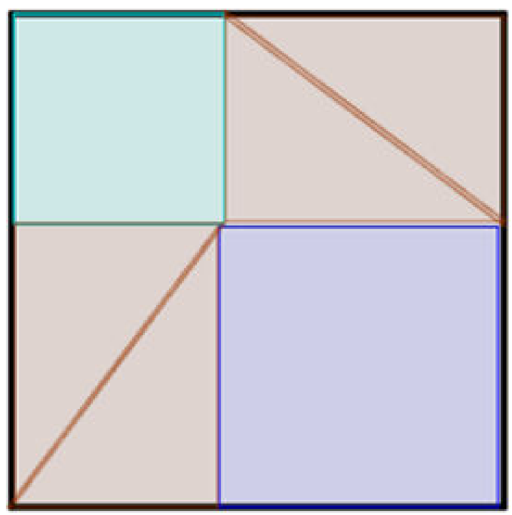
Instrucciones: Recorta las piezas de los modelos que el capacitador te entregará e identifícalos por la parte de atrás con sus respectivos números. Utiliza las piezas para montar tus rompecabezas. Con cada par de modelos se demuestra el teorema de Pitágoras. Utiliza las piezas, álgebra y tu mente matemática para demostrar que Pitágoras estaba en lo correcto.

$$Teorema\ de\ Pitágoras\ \ c^2 = a^2 + b^2$$

2. Mientras los grupos montan el rompecabezas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente.
3. El capacitador solicita que los participantes presenten sus hallazgos y sus conclusiones.
4. En grupo grande se discutirá la Hoja de Trabajo #8.

Rompecabezas #1

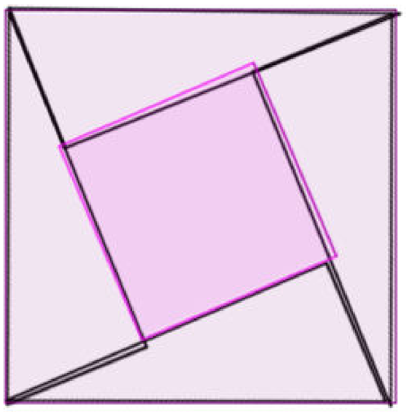


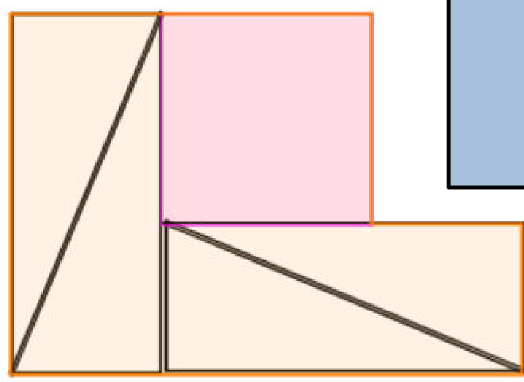


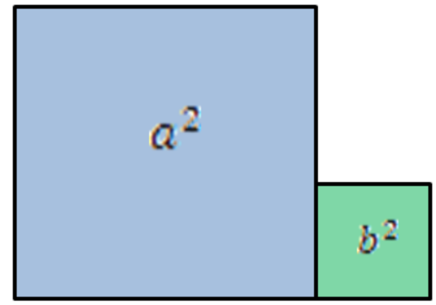
¿Por qué este rompecabezas ilustra el teorema de Pitágoras? Explica.
Clave medidas de los lados: Triángulos (a, b y c), cuadrado grande (c), cuadrado mediano (b) y cuadrado pequeño (a).
Eliminas las piezas que se repiten en ambos cuadrados. Los cuatro triángulos y te queda que el cuadrado grande es igual al cuadrado mediano más el pequeño.

¿Qué piensas de este tipo de demostración del Teorema?

Rompecabezas #2







¿Por qué este rompecabezas ilustra el teorema de Pitágoras? Explica.
Clave de las medidas: Triángulos (a, b, c) y cuadrados medianos (b-a)
Los dos rompecabezas se montan con las mismas piezas, el primer rompecabezas representa c^2, pues sus lados miden c. El segundo rompecabezas representa a^2+b^2, este segundo rompecabezas se puede dividir en dos cuadrados uno que es a^2 y el otro que es b^2.
¿Qué piensas de este tipo de demostración del Teorema?

Hoja de trabajo #2
"Rompecabezas Pitagóricos"

Instrucciones: Recorta las piezas de los modelos que el capacitador te entregará e identifícalos por la parte de atrás con sus respectivos números. Utiliza las piezas para montar tus rompecabezas. Con cada par de modelos se demuestra el teorema de Pitágoras. Utiliza las piezas, álgebra y tu mente matemática para demostrar que Pitágoras estaba en lo correcto.

$$\textit{Teorema de Pitágoras}\ \ c^2 = a^2 + b^2$$

ROMPECABEZAS 1

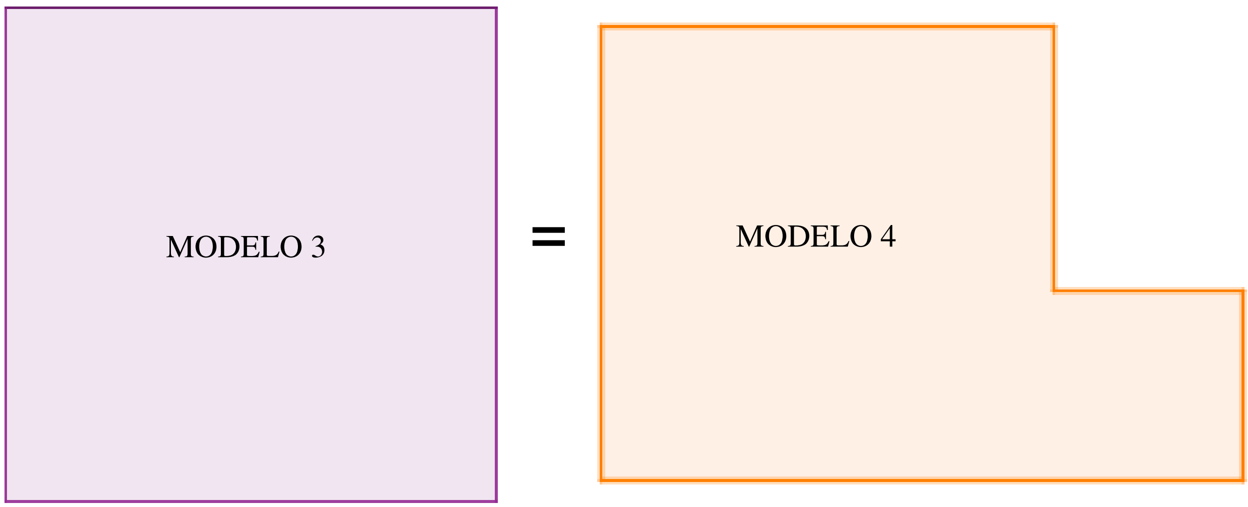
MODELO 1 = MODELO 2

Escribe el proceso algebraico:

¿Por qué este rompecabezas ilustra el teorema de Pitágoras? Explica.
¿Qué piensas de este tipo de demostración del Teorema?

$$\textit{Teorema de Pitágoras}\ \ c^2 = a^2 + b^2$$

ROMPECABEZAS 2

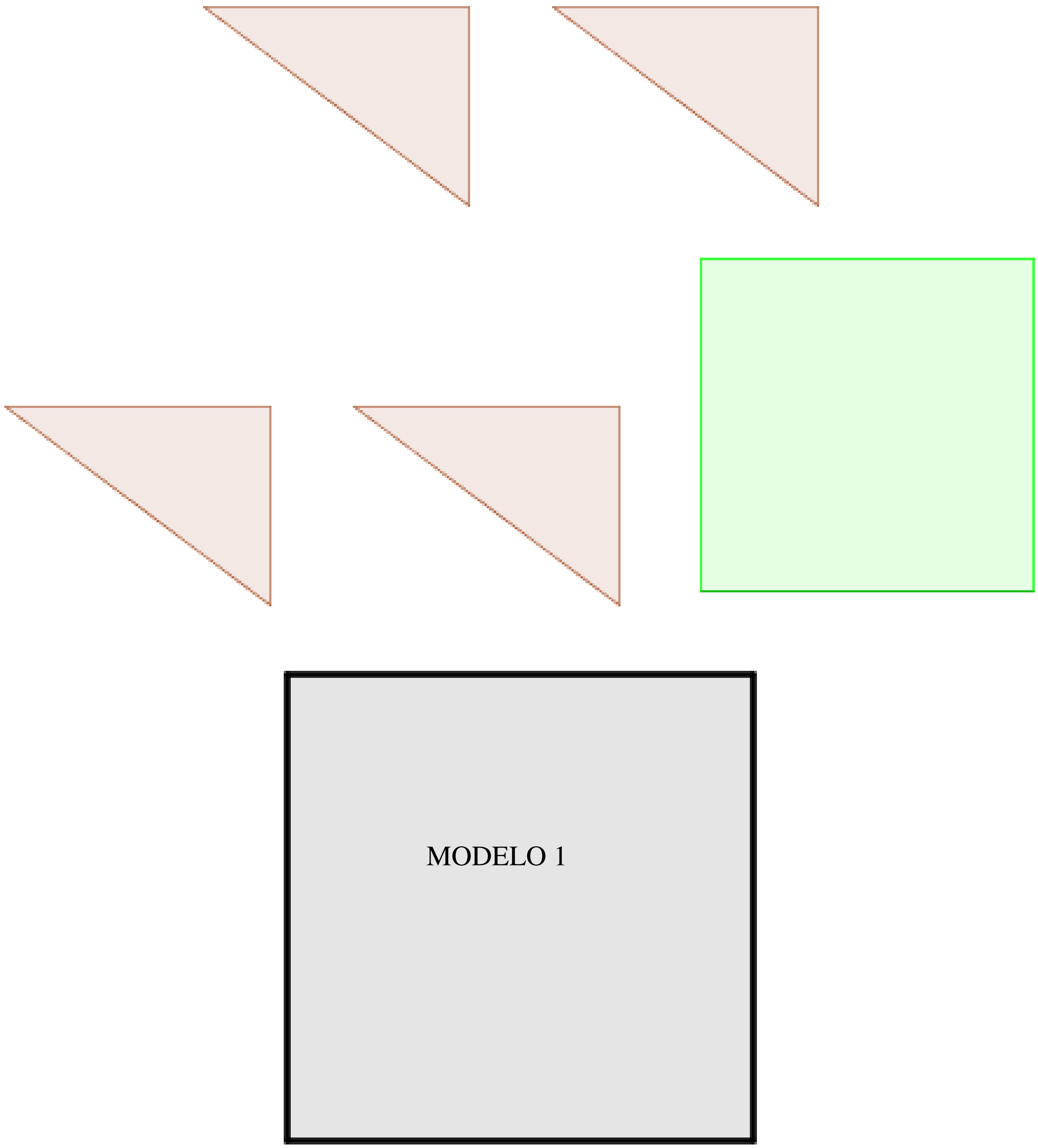


Escribe el proceso algebraico:

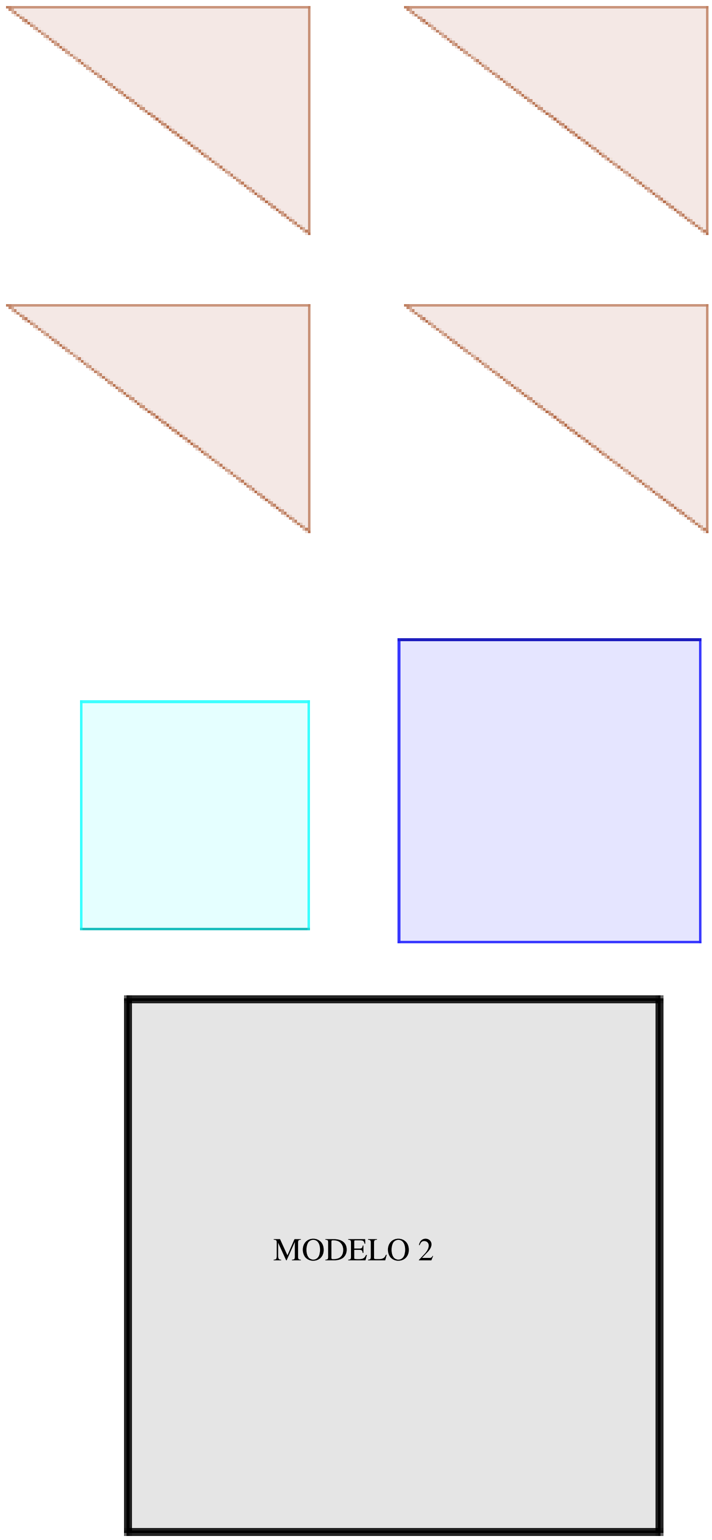
¿Por qué este rompecabezas ilustra el teorema de Pitágoras? Explica.
¿Qué piensas de este tipo de demostración del Teorema?

Anejo #1 Modelos rompecabezas Pitagóricos

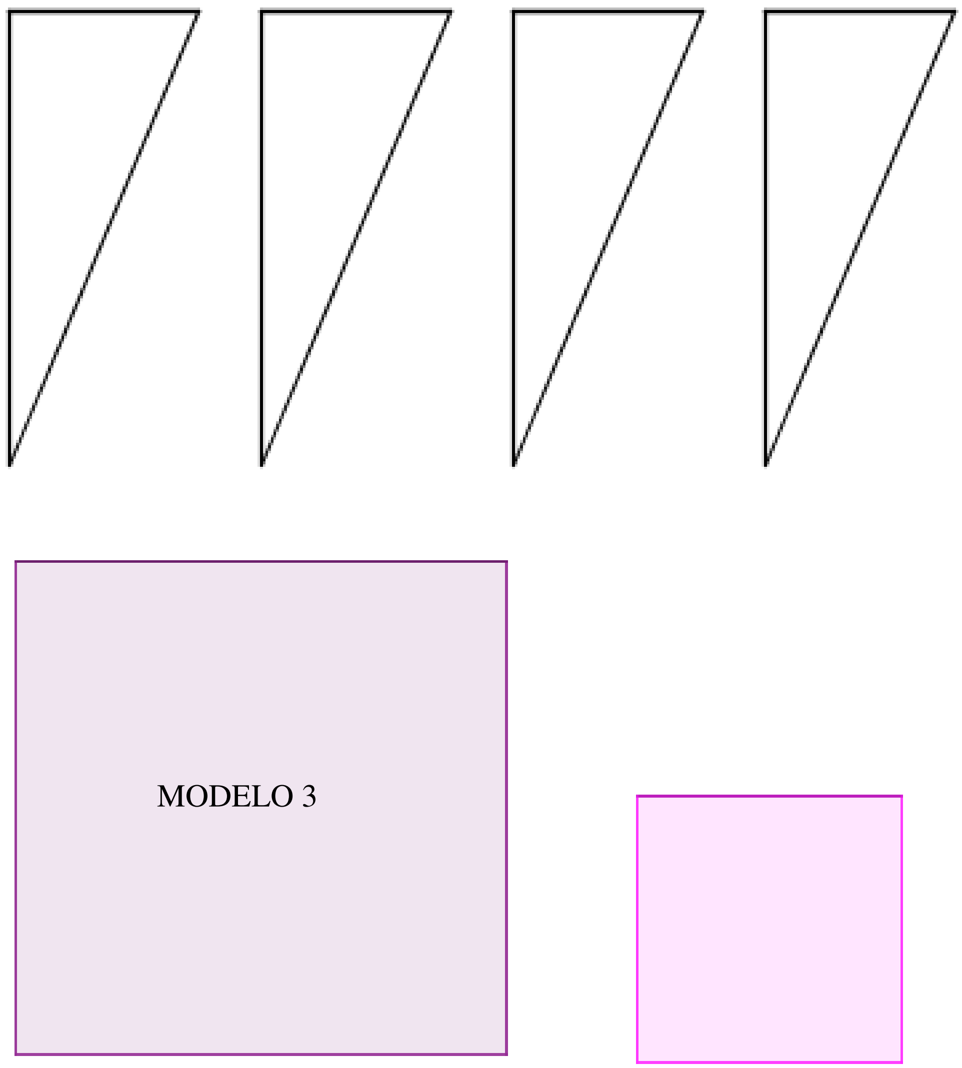
MODELO 1

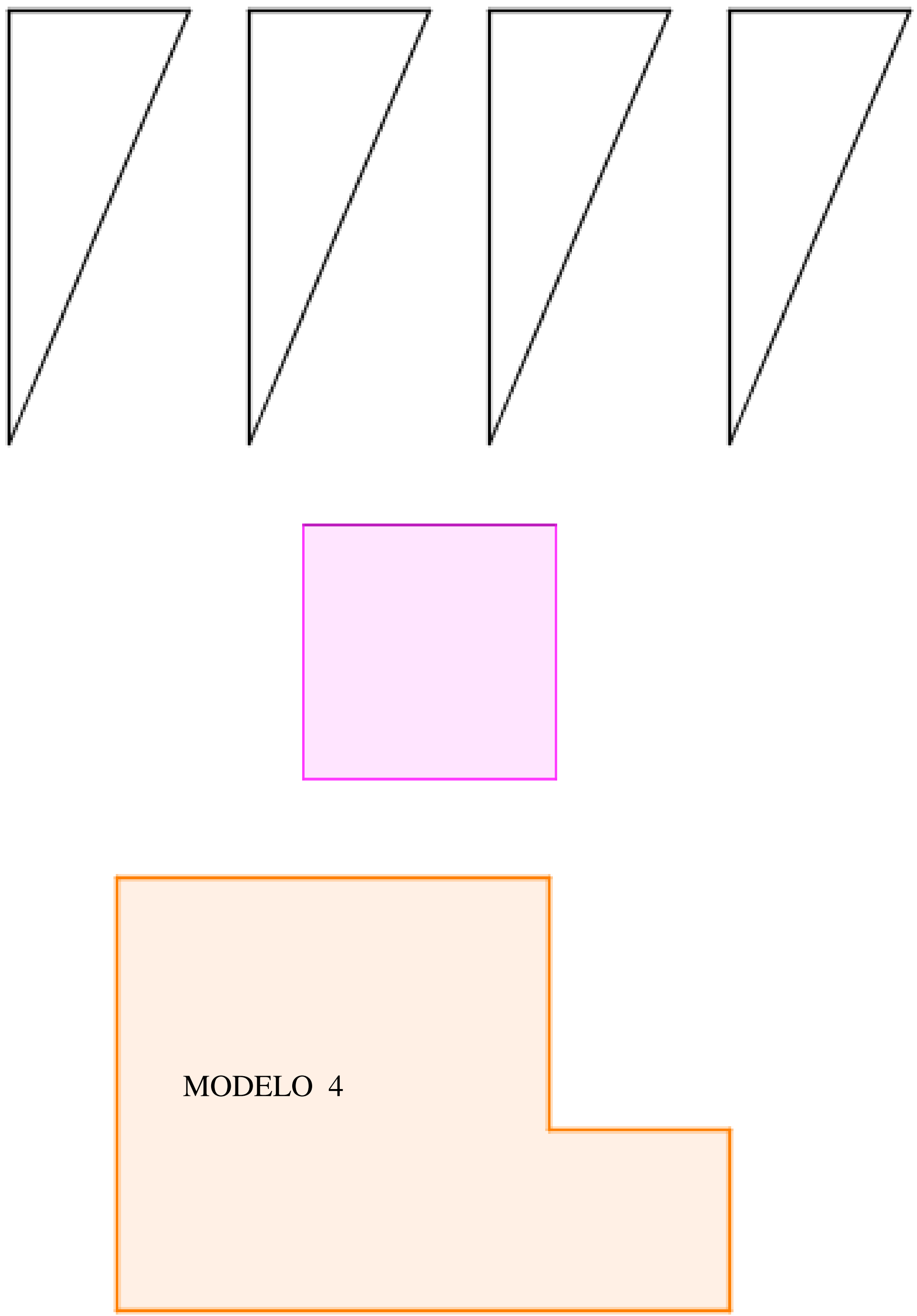


MODELO 2



MODELO 3




MODELO 4

ACTIVIDAD #3: PROGRAMANDO A PITÁGORAS (HOJA DE TRABAJO # 3)

El objetivo de esta actividad es crear un programa en la calculadora TI-84 para determinar con que longitudes se cumple el teorema de Pitágoras.

1. Se reparte la Hoja de Trabajo # 3 y se discuten las instrucciones con los participantes.

Instrucciones:

a. Utiliza la calculadora TI-84 Plus para crear un programa que determine que longitudes forman un triángulo rectángulo y cuáles no forman un triángulo rectángulo.
b. Oprime la tecla [PRGM].
c. Desplázate hasta NEW y oprime ENTER.
d. Escribe los siguientes comandos en la calculadora:
(los comandos se encuentran en la tecla de [PRGM])

```
PROGRAM:TRIRECT
: Input A
: Input B
: Input C
: Disp "SIDES =" , A, B, C
: If A²+B²=C²
:THEN
:Disp "ES TRIANGULO
RECTANGULO"
:Else
:Disp "NO ES TRIANGULO
RECTANGULO"
:Stop
```

e. Prueba tu nuevo programa para comprobar el teorema de Pitágoras.

2. El capacitador verificará que todos puede realizar el programa y brindará ayuda a quien lo necesite.
3. En grupo grande se discutirá la Hoja de Trabajo #3.

Preguntas:

¿Qué te parece este tipo de programación? Explica tu respuesta

¿Crees que es pertinente para los estudiantes? Explica.

Hoja de trabajo #3
"Programando a Pitágoras"

Instrucciones:

1. Utiliza la calculadora TI-84 Plus para crear un programa que determine que longitudes forman un triángulo rectángulo y cuáles no forman un triángulo rectángulo.
2. Oprime la tecla [PRGM].
3. Desplázate hasta NEW y oprime ENTER.
4. Escribe los siguientes comandos en la calculadora:
   (los comandos se encuentran en la tecla de [PRGM])

```
PROGRAM:TRIRECT
: Input A
: Input B
: Input C
: Disp "SIDES =" , A, B, C
: If A²+B²=C²
:THEN
:Disp "ES TRIANGULO
RECTANGULO"
:Else
:Disp "NO ES TRIANGULO
RECTANGULO"
:Stop
```

5. Prueba tu nuevo programa para comprobar el teorema de Pitágoras.

Preguntas:

¿Qué te parece este tipo de programación? Explica tu respuesta

¿Crees que es pertinente para los estudiantes? Explica.

ACTIVIDAD #4: ALGO MÁS QUE EL TEOREMA DE PITÁGORAS (HOJA DE TRABAJO # 4)

El objetivo de esta actividad es construir un triángulo en la aplicación Cabri Jr para analizar el reciproco del teorema de Pitágoras.

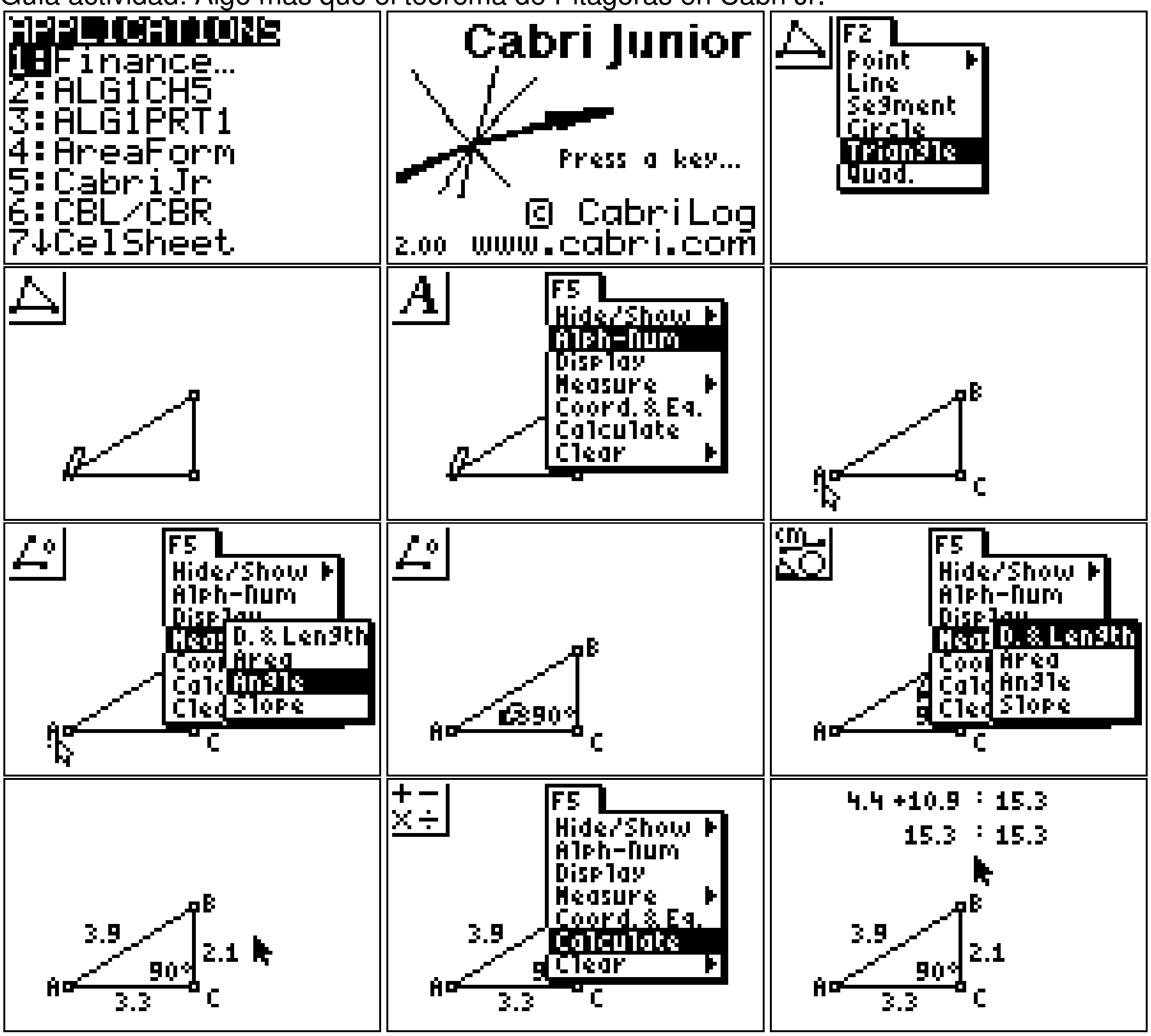
1. Se reparte la Hoja de Trabajo # 4 y se discuten las instrucciones con los participantes.

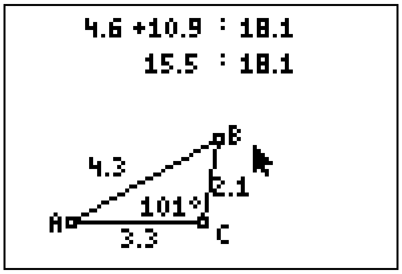
   Instrucciones:

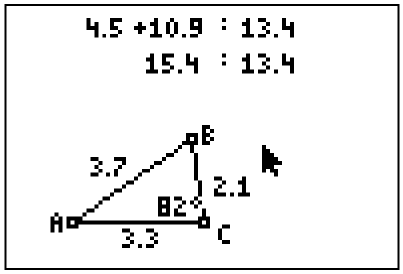
   a. Abre la aplicación de Cabri Jr. De la calculadora TI-84 Plus.
   b. Construye un triángulo cualquiera.
   c. Nombra sus vértices A, B y C.
   d. Mide el ángulo $\measuredangle BCA$, debes poder cambiar la medida del ángulo $\measuredangle BCA$ (agudo, recto y obtuso).
   e. Mide la medida de las longitudes de los tres lados.
   f. Calcula el cuadrado de los tres lados.
   g. Suma el cuadrado del lado a y el lado b.
   h. Compara la suma del cuadrado de lado a y el lado b con el cuadrado de lado c cuando el ángulo $\measuredangle BCA$ es agudo, es recto y es obtuso.
   i. Puedes utilizar la guía de Cabri Jr. para realizar la actividad.

Imágenes del proceso:

Guía actividad: Algo más que el teorema de Pitágoras en Cabri Jr.







2. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente.
3. En grupo grande se discuten las preguntas y los ejercicios de la Hoja de Trabajo #4.
   Preguntas:
   a. ¿Cuál es la relación entre c^2 y $a^2 + b^2$ cuando $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo?
      $c^2 = a^2 + b^2$
   b. ¿Cuál es la relación entre c^2 y $a^2 + b^2$ cuando $\triangle ABC$ es un triángulo acutángulo?
      $c^2 < a^2 + b^2$
   c. ¿Cuál es la relación entre c^2 y $a^2 + b^2$ cuando $\triangle ABC$ es un triángulo obtusángulo?
      $c^2 > a^2 + b^2$

Determina si el triángulo con las medidas de los lados dadas es acutángulo, obtusángulo o rectángulo.

1.	3 pulg., 7 pulg., 8 pulg.	obtusángulo
2.	3 pies, 5 pies, 5 pies	acutángulo
3.	8 cm, 15 cm, 17 cm	rectángulo
4.	7.9 m, 11.5 m, 15.4 m	obtusángulo
5.	26.2 pulg., 36 pulg., 48.1 pulg.	obtusángulo

4. El capacitador presenta el teorema del reciproco de Pitágoras.
   Teorema reciproco o inverso del teorema de Pitágoras: Si la suma de los cuadrados de las medidas de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado de la medida del lado más largo, entonces el triángulo es rectángulo.

Hoja de trabajo #4
"Algo más que el teorema de Pitágoras"

Instrucciones:
1. Abre la aplicación de Cabri Jr. De la calculadora TI-84 Plus.
2. Construye un triángulo cualquiera.
3. Nombra sus vértices A, B y C.
4. Mide el ángulo $\measuredangle BCA$, debes poder cambiar la medida del ángulo $\measuredangle BCA$ (agudo, recto y obtuso).
5. Mide la medida de las longitudes de los tres lados.
6. Calcula el cuadrado de los tres lados.
7. Suma el cuadrado del lado a y el lado b.
8. Compara la suma del cuadrado de lado a y el lado b con el cuadrado de lado c cuando el ángulo $\measuredangle BCA$ es agudo, es recto y es obtuso.
9. Puedes utilizar la guía de Cabri Jr. para realizar la actividad.
10. Contesta las siguientes preguntas:

    a. ¿Cuál es la relación entre c^2 y $a^2 + b^2$ cuando $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo?

    b. ¿Cuál es la relación entre c^2 y $a^2 + b^2$ cuando $\triangle ABC$ es un triángulo acutángulo?

    c. ¿Cuál es la relación entre c^2 y $a^2 + b^2$ cuando $\triangle ABC$ es un triángulo obtusángulo?

Determina si el triángulo con las medidas de los lados dadas es acutángulo, obtusángulo o rectángulo.

1. 3 pulg., 7 pulg., 8 pulg. ___________________

2. 3 pies, 5 pies, 5 pies ___________________

3. 8 cm, 15 cm, 17 cm ___________________

4. 7.9 m, 11.5 m, 15.4 m ___________________

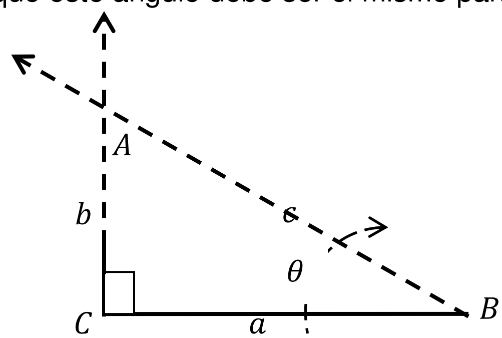
5. 26.2 pulg., 36 pulg., 48.1 pulg. ___________________

ACTIVIDAD #5: RAZONES EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO (HOJA DE TRABAJO # 5)

El objetivo de esta actividad es que mediante la construcción de triángulos semejantes y la división de las longitudes descubran las razones trigonométricas.

1. Se reparte la Hoja de Trabajo # 5 y se discuten las instrucciones con los participantes.

Instrucciones: Utiliza regla y transportador para construir tres triángulos semejantes (ángulos congruentes con lados diferentes). Escoge el tamaño de la base de cada triángulo y del ángulo formado por la base y la hipotenusa (recuerda que este ángulo debe ser el mismo para todos los triángulos).



Es necesario ser lo más preciso al medir los ángulos y las longitudes de los lados.

Una vez tengas todas las medidas de los tres triángulos (longitud de los lados y medidas de los ángulos) divide la medida del lado opuesto al ángulo θ entre la medida de la hipotenusa. Repite este procedimiento para cada triángulo.

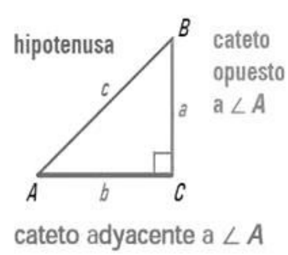
2. El capacitador ira guiando la actividad mediante las preguntas.
   a. ¿Qué resultado obtienes al dividir la medida del lado opuesto al ángulo θ entre la medida de la hipotenusa?
   b. ¿Da el mismo resultado en todos los triángulos? Explica
   c. ¿Qué quieren decir estos resultados? Explica
   d. ¿Qué relación encuentras al comparar los resultados?
   e. ¿Cuál es el nombre de esta relación?
   f. Haz un proceso similar para la división de la medida del lado adyacente al ángulo θ entre la medida de la hipotenusa y para la división de la medida del lado opuesto al ángulo θ entre la medida del lado adyacente al ángulo θ. Explica tus resultados.

3. El capacitador define razones trigonométricas:
   Razón trigonométrica – una razón entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto a } \angle A}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente a } \angle A}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto a } \angle A}{\text{cateto adyacente a } \angle A} = \frac{a}{b}$$



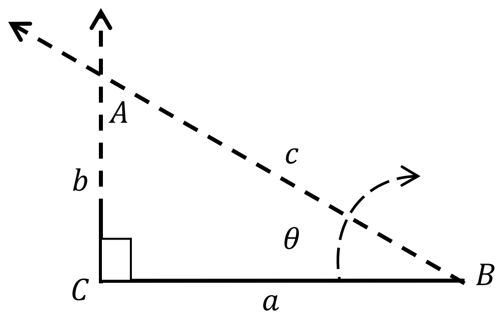
4. El capacitador explica el proceso para hallar las medidas de las longitudes de un triángulo rectángulo, cuando se conoce un lado y un ángulo adicional al de 90°.

Contestaciones de los ejercicios

1. **AC= 3.9 y BC= 2.5**
2. **DE= 3.6 y FE= 3.4**
3. **GH= 2.0 y HI= 4.2**

Hoja de trabajo #5
"Razones en el triángulo rectángulo"

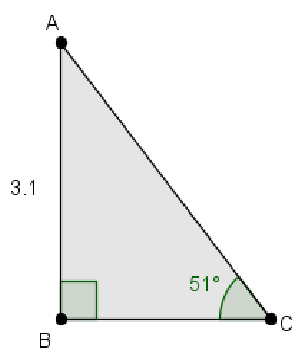
Instrucciones: Utiliza regla y transportador para construir tres triángulos semejantes (ángulos congruentes con lados diferentes). Escoge el tamaño de la base de cada triángulo y del ángulo formado por la base y la hipotenusa (recuerda que este ángulo debe ser el mismo para todos los triángulos).

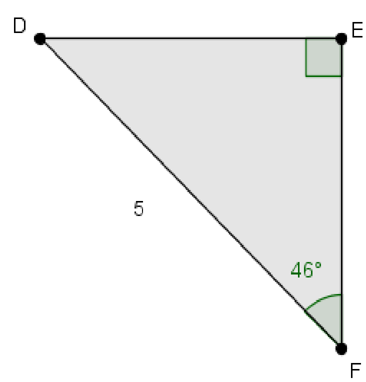


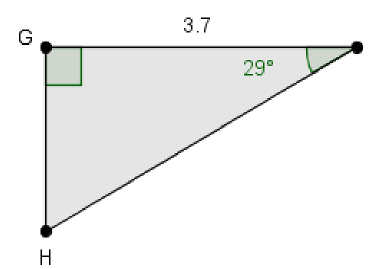
Es necesario ser lo más preciso al medir los ángulos y las longitudes de los lados.
Una vez tengas todas las medidas de los tres triángulos (longitud de los lados y medidas de los ángulos) divide la medida del lado opuesto al ángulo θ entre la medida de la hipotenusa. Repite este procedimiento para cada triángulo.
Contesta:

1. ¿Qué resultado obtienes al dividir la medida del lado opuesto al ángulo θ entre la medida de la hipotenusa?
2. ¿Da el mismo resultado en todos los triángulos? Explica
3. ¿Qué quieren decir estos resultados? Explica
4. ¿Qué relación encuentras al comparar los resultados?
5. ¿Cuál es el nombre de esta relación?
6. Haz un proceso similar para la división de la medida del lado adyacente al ángulo θ entre la medida de la hipotenusa y para la división de la medida del lado opuesto al ángulo θ entre la medida del lado adyacente al ángulo θ. Explica tus resultados.

Utiliza las razones trigonométricas para resolver los ejercicios. Busca la medida de todos los lados.







CIERRE
ACTIVIDAD CIERRE: APLICANDO LOS TEOREMAS
El objetivo de esta actividad es resumir todos los teoremas discutidos en la capacitación mediante la aplicación de cada uno de ellos en problemas de ejecución.

1. Se reparte la actividad de cierre y se discuten las instrucciones con los participantes.
   Instrucciones: Determina todas las medidas de los triángulos utilizando todos los teoremas discutidos en la capacitación. En cada procedimiento indica que teoremas estas utilizando, para hallar las medidas. Contesta las preguntas.

Parte 1

a. $m\measuredangle ACB = 53°$ Teorema: suma de ángulos
b. ¿Qué puedes decir de los lados b y a sin hallar sus medidas? Explica. (utiliza el teorema de desigualdad de triángulos)

Que su suma debe ser mayor de 35.8 cm por el teorema de la desigualdad triangular.

c. $m\,\overline{AC} = 44.8$ Teorema: razón trigonométrica coseno
d. $m\,\overline{BC} = 27.0$ Teorema: Pitágoras

Parte 2

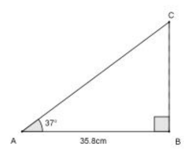
a. $m\measuredangle BCE = 15°$ Teorema: suma de ángulos
b. $m\measuredangle EBC = 75°$ Teorema: suma de ángulos
c. $m\measuredangle ABE = 50°$ Teorema: suma de ángulos
d. $m\measuredangle DAB = 140°$ Teorema: ángulo exterior
e. $m\,\overline{AB} = 3.69$ Teorema: Pitágoras o razón seno
f. $m\,\overline{AE} = 2.83$ Teorema: Razón tangente o Pitágoras
g. $m\,\overline{AC} = 11.69$ Teorema: no hay
h. $m\,\overline{BE} = 2.37$ Teorema: Pitágoras o razón seno
i. $m\,\overline{EC} = 8.86$ Teorema: Razón coseno o Pitágoras
j. ¿Puedes trazar un segmento de 5 unidades de longitud desde el punto D hasta el punto B? Explica. (utiliza un teorema para justificar tu respuesta)

Sí, porque según el teorema de la desigualdad triangular la suma de los dos lados dados es 3.69 y 2.83, su suma es 6.52, por lo tanto se puede trazar cualquier segmento menor de esta cantidad, pero mayor de 0.86.

Actividad de cierre
"Aplicando los teoremas"

Instrucciones: Determina todas las medidas de los triángulos utilizando todos los teoremas discutidos en la capacitación. En cada procedimiento indica que teoremas estas utilizando, para hallar las medidas. Contesta las preguntas.

1.



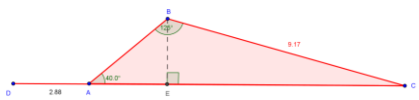
a. $m\measuredangle ACB =$ _________ Teorema: ______________________

b. ¿Qué puedes decir de los lados b y a sin hallar sus medidas? Explica. (utiliza el teorema de desigualdad de triángulos)

c. $m\,\overline{AC} =$ ___________ Teorema: ______________________

d. $m\,\overline{BC} =$ ___________ Teorema: ______________________

2.



a. $m\measuredangle BCE =$ ________ Teorema: ____________________

b. $m\measuredangle EBC =$ ________ Teorema: ____________________

c. $m\measuredangle ABE =$ ________ Teorema: ____________________

d. $m\measuredangle DAB =$ ________ Teorema: ____________________

e. $m\,\overline{AB} =$ __________ Teorema: ____________________

f. $m\,\overline{AE} =$ __________ Teorema: ____________________

g. $m\,\overline{AC} =$ __________ Teorema: ____________________

h. $m\,\overline{BE} =$ __________ Teorema: ____________________

i. $m\,\overline{EC} =$ __________ Teorema: ____________________

j. ¿Puedes trazar un segmento de 5 unidades de longitud desde el punto D hasta el punto B? Explica. (utiliza un teorema para justificar tu respuesta)

2. Reflexionarán acerca de los aprendizajes en la capacitación como *assessment* final.
3. Administrarán la pos prueba y la recogerán.
4. Discutirán la pos prueba con los participantes
5. Completarán la hoja de reacción evaluativa de la capacitación.

BIBLIOGRAFÍA

Texas Instruments Incorporated (2008). El Teorema de Pitágoras—y Algo Mas; Traducido por Ada Laabes

Departamento de Educación de Puerto Rico (2007). Estándares de Contenido y Expectativas de Grado: Programa de Matemáticas. San Juan, PR: Autor

Geometría integración, aplicaciones y conexiones, McGrawHill 2000; Gail F. Burrill

ANEJOS

ANEJO Rompecabezas Pitagóricos