

### **Modelos de variación**

Objetivos: Al finalizar el estudiante,

- Definirá variación directa.
- Definirá variación inversa.
- Definirá variación conjunta.
- Utilizará el modelo de variación directa para modelar situaciones de las ciencias naturales.
- Utilizará el modelo de variación inversa para modelar situaciones de las ciencias naturales.
- Utilizará el modelo de variación conjunta para modelar situaciones de las ciencias naturales.
- Combinará modelos de variación para modelar situaciones de las ciencias naturales.

Cuando los científicos hablan acerca de un modelo matemático para un fenómeno del mundo real con frecuencia se refiere a una ecuación que describe la relación entre dos cantidades (dos variables). Por ejemplo, el modelo podría describir cómo la población de especies animales varía con el tiempo o cómo la presión de un gas varía a medida que cambia la temperatura. En este módulo estudiaremos los llamados *modelos de variación*, con el propósito de explicar la terminología de la variación y cómo se usa en las ciencias.

### **Variación directa**

Todos los que hemos tomado un curso básico de geometría sabemos que el perímetro de un cuadrado ( $P$ ) es un múltiplo constante de la longitud del lado ( $x$ ),  $P = 4x$ . También la circunferencia de un círculo ( $C$ ) es un múltiplo constante del radio ( $r$ ),  $C = 2\pi r$ . Estos son ejemplos de *variación directa*.

**Definición 1: Variación directa**

Si las cantidades  $x$  y  $y$  están relacionadas por la ecuación

$$y = kx$$

para alguna constante  $k \neq 0$ , decimos que  $y$  **varía directamente con  $x$** , o  $y$  es **directamente proporcional a  $x$** , o simplemente  $y$  **es proporcional a  $x$** . La constante  $k$  se llama **constante de proporcionalidad**.

**Recuerde:** La gráfica de una ecuación de la forma  $y = mx + b$  es una recta con pendiente  $m$  e intercepto en el eje vertical  $b$ . Por lo tanto, la gráfica de una ecuación  $y = kx$  que describe la *variación directa* es una recta con pendiente  $k$  e intercepto en el eje vertical 0 (véase la Figura 1).

Página 124

Figura 1

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Durante una tormenta de rayos vemos el rayo y luego escuchamos el trueno, esto es así, pues la luz viaja más rápido que el sonido. La distancia entre una persona y una tormenta varía directamente con el intervalo de tiempo que transcurre entre el rayo y el trueno.

a. Suponiendo que el trueno de una tormenta que se encuentra a 5400 pies tarda 5 segundos en escucharse. Determine la constante de proporcionalidad y escriba el modelo de variación.

- b. Trace un esquema de la gráfica del modelo e interprete la constante de proporcionalidad.
- c. Si el intervalo entre el rayo y el trueno es ahora de 7 segundos, ¿cuán lejos está la tormenta?

Solución:

- a. Identifiquemos primero las variables. Sea  $D$  la distancia entre la persona y la tormenta y  $t$  la longitud del intervalo de tiempo. Como sabemos que  $D$  varía directamente con  $t$ , el modelo de variación es

$$D = kt \quad (1)$$

donde  $k$  es una constante. Para determinar  $k$ , usaremos el hecho de que  $t = 5$  segundos cuando  $D = 5400$  pies. Al sustituir en la ecuación (1), obtenemos

$$D = kt$$

Sustituir  $t = 5$  y  $D = 5400$  en la ecuación (1).

$$5400 = k(5)$$

Dividir ambos lados de la ecuación por 5.

$$k = \frac{5400}{5} = 1080$$

Constante de proporcionalidad

Al sustituir el valor de  $k$  en la ecuación (1), obtenemos

$$D = 1080t$$

o  $D(t) = 1080t$

- b. La gráfica de la ecuación  $D = 1080t$  es la línea recta que pasa por el origen y tiene pendiente 1080 (véase la Figura 2). Notemos que  $k$  es la pendiente del modelo, por lo tanto,

$$k = \frac{\text{Razón de cambio de la distancia hasta la tormenta}}{\text{Razón de cambio del tiempo que el trueno se tarda}} = 1080 \text{ pies/segundo}$$

Que es aproximadamente la velocidad del sonido en pies/segundo.

- c. Cuando  $t = 7$  segundos, al sustituir en la ecuación (1), obtenemos

$$D = 1080(7) = 7560$$

Esto es, la tormenta se encuentra a 7560 pies.

Ejercicio de práctica 1: La **ley de Hooke** establece que la fuerza ( $F$ ) necesaria para mantener estirado un resorte  $x$  unidades a partir de su longitud natural es directamente proporcional a  $x$ . En este caso a la constante de proporcionalidad se le conoce como **constante del resorte**.

- a. Estable el modelo de variación para la Ley de Hooke.
- b. Si el resorte tiene una longitud natural de 10 cm y se requiere de una fuerza de 40 N (Newton) para mantener el resorte estirado 15 cm, determine la constante del resorte.
- c. ¿Qué fuerza es necesaria para mantener estirado el resorte 18 cm?

### Variación inversa

Otro modelo matemático que frecuentemente se utiliza en las ciencias es  $y = \frac{k}{x}$ , donde  $k$  es constante, veamos.

#### **Definición 2: Variación inversa**

Si las cantidades  $x$  y  $y$  están relacionadas por la ecuación

$$y = \frac{k}{x}$$

para alguna constante  $k \neq 0$ , decimos que  $y$  **varía inversamente con  $x$** , o  $y$  es **inversamente proporcional a  $x$** . La constante  $k$  se llama **constante de proporcionalidad**.

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2: La **Ley de Boyle** establece que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del gas.

- a. Supongamos que la presión de una muestra de aire que ocupa  $0.124 \text{ m}^3$  a  $23^\circ\text{C}$  es  $48 \text{ kPa}$ . Determine la constante de proporcionalidad, y escriba el modelo matemático que expresa la relación entre estas variables.
- b. Determine la presión del aire si la muestra se expande a un volumen de  $0.34 \text{ m}^3$ .

Solución:

- a. Identifiquemos primero las variables. Sea  $P$  la presión de la muestra y  $v$  el volumen. Como sabemos que  $P$  varía inversamente con  $v$ , el modelo de variación es

$$P = \frac{k}{v} \quad (2)$$

donde  $k$  es una constante. Para determinar  $k$ , usaremos el hecho que  $v = 0.124 \text{ m}^3$  cuando  $P = 48 \text{ kPa}$ . Al sustituir en la ecuación (2), obtenemos

$$P = \frac{k}{v}$$

Sustituir  $v = 0.124$  y  $P = 48$  en la ecuación (2).

$$48 = \frac{k}{0.124}$$

Multiplicar ambos lados de la ecuación por  $0.124$ .

$$k = 48(0.124) = 5.952$$

Constante de proporcionalidad

Al sustituir el valor de  $k$  en la ecuación (2), obtenemos

$$P = \frac{5.952}{v}$$

$$\text{o } P(v) = \frac{5.952}{v}$$

b. Cuando  $v = 0.34 \text{ m}^3$ , al sustituir en el modelo, obtenemos

$$P = \frac{5.952}{0.34} \approx 17.51 \text{ kPa}$$

Ejercicio de práctica 2: La intensidad ( $I$ ) de un sonido (medida en decibeles, dB) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia ( $d$ ) a la fuente del sonido.

a. Una persona que se encuentra a 10 pies de una podadora experimenta un nivel de sonido de 70 dB. Determine el modelo de variación que relacione estas dos variables.

b. ¿Cuál será la intensidad del sonido para una persona que se encuentra a 90 pies?

### Variación conjunta

Un muchas ocasiones una cantidad física está relacionada con otra cantidad. Si una cantidad es proporcional a dos o más otras cantidades, llamamos a esta relación **variación conjunta**.

#### **Definición 3: Variación conjunta**

Si las cantidades  $x$ ,  $y$ , y  $z$  están relacionadas por la ecuación

$$z = kxy$$

para alguna constante  $k \neq 0$ , decimos que  $z$  **varía conjuntamente con  $x$  y  $y$** , o  $z$  es **conjuntamente proporcional a  $x$  y  $y$** . La constante  $k$  se llama **constante de proporcionalidad**.

En las ciencias, es común, la relación entre tres o más variables y es posible cualquier combinación de los diferentes tipos de proporcionalidad que hemos discutido. Por ejemplo, si

$$z = k \frac{x}{y}$$

decimos que  $z$  es **proporcional a  $x$**  e **inversamente proporcional a  $y$** . Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3: La ley de la gravitación de Newton establece que, “La fuerza de atracción  $F$  entre dos objetos es conjuntamente proporcional a sus masas  $m_1$  y  $m_2$ , e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $d$  entre ellos”. Determine el modelo matemático que establece la Ley de gravitación de Newton.

Solución: Usando las definiciones de variación conjunta e inversa y aplicándolas a la ley, obtenemos

$$F = K \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Si usamos la notación tradicional  $G$  para la constante de proporcionalidad para la gravedad, obtenemos

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Ejercicio de práctica 3: La frecuencia  $F$  de la cuerda de una guitarra que vibra es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión  $T$  e inversamente proporcional a la longitud  $L$ . ¿Cuál es el efecto sobre la frecuencia si la longitud se duplica y la tensión se cuadruplica?

Respuestas a los ejercicios de práctica

- $F = kx$
  - $k = 8$
  - $F = 64 N$
- $I = \frac{7000}{d^2}$
  - $I = 0.86 dB$
- Se mantiene igual.

Ejercicios de práctica del módulo 2

1. Supón que  $y$  es directamente proporcional a  $x$  y que la constante de proporcionalidad es positiva. Si  $x$  aumenta, ¿qué ocurre con  $y$ ? Explica.
2. Supón que  $y$  es directamente proporcional a  $x$  y que la constante de proporcionalidad es negativa. Si  $x$  aumenta, ¿qué ocurre con  $y$ ? Explica.
3. Supón que  $y$  es inversamente proporcional a  $x$  y que la constante de proporcionalidad es positiva. Si  $x$  aumenta, ¿qué ocurre con  $y$ ? Explica.
4. Explica que significa para  $w$  ser conjuntamente proporcional a  $x$  y  $y$ .
5. Supón que  $y$  varía directamente con  $x$ . ¿Cuál es el valor de  $y$  cuando  $x = 0$ ? Explica.
6. Supón que  $y$  varía inversamente con  $x$ . ¿Cuál es el valor de  $y$  cuando  $x = 1$ ? Explica.

*En los problemas 7 a 15, convierte cada enunciado en una ecuación usando  $k$  como la constante de proporcionalidad.*

7.  $P$  es directamente proporcional a  $x$ .
8.  $y$  es inversamente proporcional al cuadrado de  $x$ .
9.  $S$  es conjuntamente proporcional a  $e$  y  $t$ .
10.  $U$  es directamente proporcional a  $v$ .
11.  $L$  es inversamente proporcional al cuadrado de  $m$ .
12.  $W$  es conjuntamente proporcional a  $x$ ,  $y$  y  $z$ .
13.  $A$  varía conjuntamente con la raíz cuadrada de  $c$  y  $d$ .
14.  $C$  varía conjuntamente con el cuadrado de  $x$  y la raíz cúbica de  $y$ .
15.  $E$  varía directamente con  $a$  e inversamente con el cuadrado de  $b$ .
16.  $u$  varía directamente con la raíz cuadrada de  $v$ . Si  $u = 5$  cuando  $v = 16$ , halla  $u$  cuando  $v = 49$ .
17.  $y$  varía directamente con el cubo de  $x$ . Si  $y = 24$  cuando  $x = 2$ , halla  $y$  cuando  $x = 5$ .
18.  $R$  es inversamente proporcional al cuadrado de  $x$ . Si  $R = 5$  cuando  $x = \sqrt{3}$ , halla  $R$  cuando  $x = 5$ .



19.  $J$  es directamente proporcional a la raíz cúbica de  $x$ . Si  $J = 15$  cuando  $x = 9$ , halla  $J$  cuando  $x = 64$ .
20.  $Q$  varía conjuntamente con  $m$  y el cuadrado de  $n$ , e inversamente con  $P$ . Si  $Q = 7$  cuando  $m = 5$ ,  $n = 3$  y  $P = 30$ , halla  $Q$  cuando  $m = 3$ ,  $n = 28$  y  $P = 42$ .
21. El periodo de un péndulo  $P$  (el tiempo que transcurre durante un balanceo completo del péndulo) varía directamente con la raíz cuadrada de la longitud  $l$  del péndulo.
  - a. Determine el modelo que exprese esta relación entre estas dos variables.
  - b. Con el propósito de duplicar el periodo, ¿qué tanto tendríamos que modificar la longitud  $l$ ?
22. El peso  $w$  de un objeto sobre o por encima de la superficie la Tierra varía inversamente con el cuadrado de la distancia  $d$  entre el objeto y el centro de la Tierra. Si una niña pesa 100 libras en la superficie de la Tierra, ¿cuánto pesaría (a la libra más cercana) 400 millas por encima de la superficie de la Tierra? (Supón que el radio de la Tierra es 4,000 millas).
23. La **ley de Boyle** establece que la presión  $P$  de una muestra de gas es directamente proporcional a la temperatura  $t$  e inversamente proporcional al volumen  $v$  (vea el ejemplo 2).
  - a. Escribe el modelo que describe la relación entre estas variables.
  - b. Determine la constante de proporcionalidad si 100 L de gas ejercen una presión de 33.2 kPa a una temperatura de 400 K (temperatura absoluta medida en la escala Kelvin).
  - c. Si la temperatura aumenta a 450 K y el volumen disminuye a 90 L, ¿cuál es la presión del gas?
24. Un peatón fue golpeado por un carro. El conductor del auto aplicó los frenos y dejó marcas de 140 pies de longitud. Le dijo a la policía que conducía a 25 millas por hora. La policía sabe que la longitud de las marcas de frenado  $L$  (cuando se aplican los frenos) varía directamente como el cuadrado de la velocidad del carro  $v$  y que a 30 millas/hora (bajo condiciones ideales) las marcas de frenado serían de 40 pies de longitud.
  - a. ¿A qué velocidad iba realmente el conductor antes de aplicar los frenos?

- b. Si al momento de aplicar los frenos se encontraba a 20 pies del peatón, ¿cuál es la velocidad máxima a la que podía viajar para no golpear al peatón?
25. La tercera *ley de Kepler* sobre el movimiento de los planetas establece que el cuadrado del periodo  $P$  de un planeta (el tiempo que tarda el planeta en completar una vuelta alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de su distancia  $d$  a partir del Sol.
- Expresa la ley de Kepler como un modelo de variación.
  - Determine la constante de proporcionalidad aplicando el hecho de que el periodo para nuestro planeta es aproximadamente 365 días y la distancia promedio es de aproximadamente 93 millones de millas.
  - Neptuno está aproximadamente a  $2.79 \times 10^9$  millas del Sol. Calcule el periodo de Neptuno.
26. La ley de Ohm afirma que la corriente  $I$  en un alambre varía directamente con las fuerzas electromotrices  $E$  e inversamente con la resistencia  $R$ . Si  $I = 22$  amperios cuando  $E = 110$  voltios y  $R = 5$  ohm, halla  $I$  si  $E = 220$  voltios y  $R = 11$  ohm.
27. El empuje  $E$  (véase Figura 2) sobre el ala de un avión al despegar varía conjuntamente con el cuadrado de la velocidad  $v$  del avión y el área  $a$  de sus alas. Un aeroplano con un área de alas de 500 pies cuadrados que se desplaza a 50 millas por hora experimenta un empuje de 1700 libras. ¿Qué empuje experimenta un avión que tiene un área de alas de 650 pies y viaja a 60 millas por hora?

Pág. 128
Figura 2

28. Los antropólogos, en su estudio sobre razas y grupos genéticos humanos, a menudo utilizan un índice llamado el *índice cefálico*. El índice cefálico  $C$  varía directamente con el ancho  $w$  de la cabeza e inversamente con la longitud  $I$  de la cabeza (ambos, visto desde la parte superior). Si un indígena de Baja California (México) tiene medidas de  $C = 75$ ,  $w = 6$  pulgadas e  $I = 8$  pulgadas, ¿cuál es la medida de  $C$  para un indígena en el norte de California con  $w = 8.1$  pulgadas e  $I = 9$  pulgadas?

29. En un accidente automovilístico, la fuerza destructiva  $F$  de un carro es (aproximadamente) conjuntamente proporcional al peso  $w$  del carro y al cuadrado de su velocidad  $v$ . (Esta es la razón por la que los accidentes a alta velocidad generalmente son graves). ¿Cuál sería el efecto sobre las fuerzas destructivas de un carro si su peso y velocidad se duplicaran?
30. El número  $N$  de mutaciones genéticas que resultan de la exposición a los rayos X varía directamente con el tamaño de la dosis  $r$  de rayos X. ¿Cuál es el efecto sobre  $N$  si  $r$  se cuadruplica?
31. La tasa  $R$  a la cual una enfermedad se extiende dentro de una población de tamaño  $p$  es conjuntamente proporcional a la cantidad  $x$  de personas infectadas y al número  $p - x$  de quienes no están infectados. Una infección brota en una comunidad al centro de la isla cuya población es 5000 personas.
- Escriba el modelo que relaciona la tasa  $R$  con la cantidad de personas infectadas  $x$ .
  - Compare la tasa de diseminación de esta infección cuando 10 personas están infectadas con la tasa cuando están infectadas 1000 personas.
32. En biología existe una regla aproximada, llamada la *regla bioclimática* para climas moderados, la cual establece que la diferencia  $d$  en tiempo para que las frutas maduren (o los insectos aparezcan) varía directamente con el cambio de altitud  $h$ . si  $d = 4$  días cuando  $h = 500$  pies, halla  $d$  cuando  $h = 2,500$  pies.

Respuestas a los ejercicios de práctica del módulo 2

1. Aumenta
2. Disminuye
3. Disminuye
4.  $w = kxy$
5. 0
6.  $K$
7.  $P = kx$

8.  $y = \frac{k}{x^2}$
9.  $S = ket$
10.  $U = kv$
11.  $L = \frac{k}{m^2}$
12.  $w = kxyz$
13.  $A = kd\sqrt{c}$
14.  $C = kx^2\sqrt[3]{y}$
15.  $E = k\frac{a}{b^2}$
16.  $\frac{35}{4}$
17. 375
18.  $\frac{3}{5}$
19. 40
20. 28
21. a.  $P = k\sqrt{l}$   
b.  $4l$
22. 83 libras
23. a.  $P = k\frac{t}{v}$   
b. 8.3  
c. 41.5 kPa
24. a. 56 *millas/hora*  
b. 21 *millas/hora*
25. a.  $P^2 = kd^3$   
b.  $\frac{365^2}{(9.3 \times 10^7)^3} \approx 1.6563 \times 10^{-19}$   
c. 59976 días
26. 20 amperios
27. 1310.4 lb
28. 90
29. Ocho veces la original.
30. Cuatro veces la original.
31. a.  $R = kx(5000 - x)$   
b.  $R_{1000} = 80.16R_{10}$
32. 20 días