RAZONAMIENTO Y PRUEBAS
GUÍA DEL MAESTRO

Autor: Dr. Edwin Morera González

Materia: Matemáticas **Nivel:** 7-9

Conceptos Principales: Razonamiento inductivo y pruebas.

Conceptos Secundarios: Conjetura e hipótesis.

Conocimiento previo: Segmentos y ángulos.

Objetivos específicos:

Durante la actividad el participante:

1. Hará conjeturas
2. Utilizará las leyes de la lógica para obtener conclusiones.
3. Resolverá problemas según un modelo.
4. Realizará demostraciones algebraicas.
5. Escribirá demostraciones relacionadas con segmentos.

Estándares, Expectativas e Indicadores por Grado:
ESTÁNDAR DE CONTENIDO 3: GEOMETRÍA
El estudiante es capaz de identificar formas geométricas, analizar sus estructuras, características, propiedades y relaciones para entender y descubrir el entorno físico.

Séptimo
Relaciona y aplica las transformaciones rígidas.
G.TS.7.13.1 Describe el efecto de transformaciones rígidas (traslación, reflexión respecto a líneas verticales u horizontales, rotación respecto al origen y composiciones simples) en figuras en el plano de coordenadas.
G.TS.7.13.2 Utiliza transformaciones rígidas para identificar las partes correspondientes de figuras congruentes.

Noveno

5.0 Identifica figuras congruentes y justifica estas congruencias estableciendo condiciones suficientes y hallando las transformaciones que preservan la congruencia entre las figuras. Resuelve problemas que involucran la congruencia en una variedad de contextos.
G.TS.9.5.1 Analiza figuras en términos de sus simetrías por medio de los conceptos reflexión, rotación y traslación; y una combinación de éstas.

Proyecto sufragado por el Departamento de Educación mediante el programa: Título I Parte A

G.FG.9.5.2 Compara y contrasta la igualdad, la congruencia y la semejanza.
G.FG.9.5.3 Identifica, contrasta, diferencia y aplica las condiciones suficientes para la congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA, AAL, HL).
G.TR.9.5.4 Utiliza la geometría de coordenadas y las transformaciones rígidas (reflexiones, traslaciones y rotaciones) para establecer la congruencia de figuras.

6.0 Identifica y aplica las transformaciones de figuras en el plano de coordenadas y discute los resultados de estas transformaciones.
G.TS.9.6.1 Representa traslaciones, reflexiones respecto a una línea, rotaciones y dilataciones (centradas en el origen) de objetos en el plano de coordenadas por medio de trazos, coordenadas, notación de funciones y matrices, y explica los efectos de estas transformaciones.
G.TS.9.6.2 Reconoce e identifica las partes correspondientes de figuras congruentes y semejantes luego de una transformación.

Trasfondo:

Un gremio de abogados y sus primeros aprendices aparecieron en Inglaterra en el siglo XIV. Desde entonces esta profesión se ha extendido por todo el mundo. Según la Guía del Futuro Ocupacional, jueces y abogados ocuparon 716,000 empleos en E.U., 1992. Los abogados pueden actuar como consejeros legales o como defensores de sus clientes. Los detalles del trabajo dependen de su especialización. Pero sin importar el papel que desempeñe, todos los abogados deben interpretar y aplicar la ley a las situaciones específicas, los abogados deben tener habilidades para el ***pensamiento lógico y el razonamiento***.

En el desarrollo de las matemáticas ubicamos la necesidad de resolver problemas en las culturas egipcia y babilónica (3000 a.C. – 260 d.C.). El enfoque de estas culturas era un poco el método “haga primero A, luego B”: a fin de resolver un problema o realizar una operación, se daba una especie de receta de cocina, y se ponía en práctica una vez y otra para resolver problemas similares. Durante el periodo griego clásico (600 a.C. – 450 d.C.) surgió un tipo más formar de matemáticas en el que los conceptos generales se aplicaban a problemas específicos, lo cual dio como resultado un desarrollo ***lógico y estructurado*** de este lenguaje.

Glosario:

Conjetura: Suposición fundamentada en observaciones repetidas de un patrón o proceso particular.

Razonamiento inductivo: Este razonamiento se caracteriza por permitir llegar a una conclusión general (mediante una conjetura) a partir de observaciones repetidas de ejemplos específicos. La conjetura puede ser verdadera o falsa.

Contraejemplo: Cuando se comprueba una conjetura obtenida por medio del razonamiento inductivo, un solo ejemplo donde no funcione la conjetura se conoce como conjetura y basta para demostrar que la conjetura es falsa.

Proposición: Aseveración que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas.

Proyecto sufragado por el Departamento de Educación mediante el programa: Título I Parte A

Proposición condicional: Sean p y q dos proposiciones entonces la proposición *si p, entonces q* se conoce como proposición condicional. A la proposición p se le llama hipótesis y la proposición q es la conclusión. El condicional si p entonces q se representa $p \to q$.

Proposición recíproca: Dada la proposición condicional $p \to q$ la proposición que se obtiene al intercambiar la hipótesis y la conclusión ($q \to p$) se conoce como la recíproca del condicional.

Proposición inversa: Dada la proposición condicional $p \to q$ la proposición que se obtiene al negar la hipótesis y negar la conclusión ($\sim p \to \sim q$) se conoce como la inversa del condicional.

Tabla de verdad: Tabla que resume todos los posibles valores de una proposición.

Ley de separación o indiferencia: Si $p \to q$ es una condicional verdadera y *p* es verdadera, entonces *q* es verdadera.

Razonamiento deductivo: Se caracteriza por la aplicación de principios generales a ejemplos específicos.

Ley de silogismo: Si $p \to q$ y $q \to r$ son condicionales verdaderas, entonces $p \to r$ también es verdadera.

Materiales y equipo:

1. Papelotes
2. Marcadores
3. Cinta adhesiva
4. Reglas (una para cada participante)
5. Calculadoras gráficas *TI-84 Plus*
6. Computadora
7. Proyector digital (*Infocus*)

Proceso Educativo:

I. Pre y Pos prueba

1. Se evaluará el conocimiento de los participantes antes de la capacitación con la

Preprueba y el conocimiento después con la Posprueba (documentos adjuntos).

II. Assessment Continuo

1. Obviamente la preprueba y la posprueba son parte del assessment de la capacitación. Es la primera ayuda al capacitador para tomar decisiones acerca del conocimiento que tiene el participante del tema y de las próximas actividades que llevará a cabo. Mientras la posprueba ayuda al capacitador a tomar decisiones de la necesidad de re enseñanza en próximas capacitaciones.
2. Las hojas de trabajo, el capacitador las utilizará como assessment. Los participantes estarán cotejando su aprendizaje en la medida que se discutan las mismas en grupo grande. Además, el capacitador las corrige y las utilizarlas para tomar decisiones.
3. Durante todas las actividades el capacitador estará haciendo observaciones mientras se mueve entre los grupos, cuando los participantes discuten en grupo y cuando presentan sus respuestas a las preguntas. Esto le permite hacer conclusiones del aprendizaje de éstos y los próximos pasos a seguir.

Primera parte

I. **Inicio:** *Explorando las concepciones previas*

1. La actividad está diseñada para indagar el conocimiento que tienen los participantes acerca de concepto conjetura.
   i. Se dividen los maestros en cuatro o cinco grupos.
   ii. El capacitador le pide a cada grupo que, en un papelote, conteste las siguientes preguntas:
      1. ¿Qué es una conjetura?
      2. Formula una conjetura para los puntos A, B y C, AB = 10, BC = 8 y AC = 5

y dibuja una figura que ilustre tu conjetura.

iii. Cada grupo presenta sus contestaciones al grupo grande. El capacitador y los participantes no pasarán juicio sobre lo presentado. El capacitador estará observando las contestaciones e identificará concepciones erróneas, si las hay, para luego, a través de la capacitación, hacer énfasis en las mismas y corregirlas. En el cierre de la capacitación los participantes volverán a revisar las contestaciones de las preguntas y harán los arreglos pertinentes. De esta forma tendrán la oportunidad de percatarse de los posibles errores y corregirlos, mientras el capacitador tendrá un assessment final.

II. Desarrollo

Actividad 1: Conjetura

1. El capacitador plantea la siguiente situación: ***Luis llevaba a sus amigos a la universidad cuando de repente su automóvil se detuvo a una milla de su destino.***
   Pregunta: ¿por qué crees que el auto de Luis se detuvo?
   Permite que los participantes discutan y guía la discusión para que los participantes se den cuenta que todas las suposiciones que han mencionado son conjeturas acerca del por qué el auto de Luis se detuvo y el razonamiento utilizado para llegar a la misma se conoce como razonamiento inductivo. El capacitador define los conceptos conjetura y razonamiento inductivo (ver glosario).
2. El capacitador plantea la siguiente situación:
   Dados los puntos P, Q y R colineales, Luis conjetura que Q está entre P y R.
   Pregunta: ¿La conjetura es verdadera o falsa? El capacitador permite que los

participantes discutan y dirige la misma. Contestación: Como podemos tener los tres puntos colineales con R entre Q y P, podemos concluir que la conjetura es falsa pues encontramos un ***contraejemplo***. El capacitador define el concepto contraejemplo (ver glosario).

3. El capacitador plantea el siguiente problema y permite que los participantes la contesten: ***Elabora una conjetura sobre los puntos A, B, C y D si sabemos que*** $\overrightarrow{DB}$ ***es una bisectriz del*** $\angle ABC$***.*** Contestación: $m\angle ABD = m\angle CBD$ (pueden haber varias contestaciones recuerden que la conjetura NO tiene que ser cierta).
4. El capacitador plantea el siguiente problema y permite que los participantes la contesten: Determine si la siguiente conjetura es verdadera o falsa:

   Dado: puntos colineales X, Y Z; Z está entre X y Y.

   Conjetura: XY + YZ = XZ

   Contestación: Falso; XZ + YZ = XY (postulado de adición de segmentos), lo que implica que XY – YZ = XY.
5. El capacitador plantea el siguiente problema y permite que los participantes la contesten: ***Analice las siguientes afirmaciones:***

   Afirmación 1: 1 = 1

   Afirmación 2: 1+3 = 4

   Afirmación 3: 1 + 3 + 5 = 9

   Afirmación 4: 1 + 3 + 5 + 7 = 16

   Afirmación 5: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25

   Pregunta: ¿Cuál será la afirmación 6? Contestación: 1 + 3 + 5 +7 + 9 + 11 = 36.

   Pregunta: Haga una conjetura sobre la afirmación 50.

Contestación: $1 + 3 + 5 + \ldots + 99 = 50^2$

Pregunta: Haga una conjetura sobre la afirmación n (n cualquier número natural).

Contestación: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

6. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 1 (HT1) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 1: Soluciones)
7. El capacitador discute los resultados de la HT1 en grupo grande.

Actividad 2: Proposiciones si-entonces (EL CONDICIONAL)

1. El capacitador pregunta, ¿qué tienen en común las siguientes aseveraciones?:

   P_1: *El correo electrónico constituye un medio de comunicación.*

   P_2: *11 + 6 = 17*

   P_3: *15 + 5 > 29*

   El capacitador fomenta que los participantes discutan y la dirige hasta que concluyan que estas aseveraciones se pueden clasificar en ciertas o falsa, pero no en ambas.

   El capacitador define el concepto proposición.
2. El capacitador explica que cuando combinamos dos o más proposiciones se obtiene una proposición compuesta. Una proposición compuesta muy utilizada en matemática es la proposición si-entonces, mejor conocida como una proposición condicional (ver glosario). Ejemplos: El capacitador presenta los ejemplos y le pide a los participantes que mencionen la hipótesis y la conclusión.

- Si Luis es un bebé, entonces Luis no es lógico. Hipótesis: Luis es un bebe; Conclusión: Luis no es lógico.
- La siguiente proposición es parte de un mensaje que se difunde con frecuencia por las estaciones de radio en toda el país: "Si está hubiera sido una emergencia real, (entonces) la señal de alarma que usted acaba de escuchar sería seguida por noticias, instrucciones o información de carácter oficial". Hipótesis: Hubiera sido una emergencia real; Conclusión: La señal de alarma sería seguida por noticias, instrucciones o información de carácter oficial. El capacitador explica que en algunas ocasiones no se usa si ni entonces cuando se escribe una proposición condicional y presenta el próximo ejemplo.
- Lewis Carroll, autor de los libros *Las aventuras de Alicia en el país de la maravillas* y *A través del espejo*, fue tan buen matemático como escritor. Él fue un experto en la creación de acertijos y en hacer conexiones entre la matemática y la literatura. A continuación uno de sus planteamiento.

  Los bebés son ilógicos.

  Nadie ignora a alguien que puede domar un cocodrilo.

  Las personas ilógicas son ignoradas.

La conclusión del planteamiento anterior puede verse confusa. El capacitador anima a los participantes para que reescriban las proposiciones en la forma si-entonces.

Proposición	$p \rightarrow q$
Los bebés son ilógicos.	Si una persona es un bebé, entonces la persona no es lógica.
Nadie es ignorado si puede domar un cocodrilo	Si una persona puede domar un cocodrilo, entonces no es ignorada.
Las personas ilógicas son ignoradas.	Si una persona no es lógica, entonces la persona es ignorada.

Proyecto sufragado por el Departamento de Educación mediante el programa: Título I Parte A

Notemos que en ocasiones hay que añadir información cuando se escribe en la forma si-entonces. El capacitador plantea el siguiente ejemplo y anima a los participantes para que lo escriban de la forma si-entonces: *Rectas perpendiculares se intersecan.* Contestación: Si dos rectas son perpendiculares, entonces las rectas se intersecan.

3. El capacitador plantea la siguiente proposición y le pide a los participantes que construyan una proposición intercambiando la hipótesis y la conclusión: ***Si dos ángulos son adyacentes, entonces tienen un lado en común.*** Contestación: Si dos ángulos tienen un lado en común, entonces son adyacentes. El capacitador define la proposición ***recíproca*** (ver glosario) e indica que las proposiciones anteriores son un ejemplo de una proposición y su recíproca.
4. El capacitador utiliza tablas de verdad (ver glosario) para demostrar que una proposición condicional y su recíproca no son equivalentes.

P	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
C	C	C	C
C	F	F	C
F	C	C	F
F	F	C	C

Esto significa, que podemos tener una proposición condicional verdadera y su recíproca no tiene que serlo.

5. El capacitador plantea la siguiente proposición condicional y le pide a los participantes que encuentren la recíproca y verifiquen su veracidad: Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes. Contestación: Recíproca; si dos ángulos son congruentes, entonces son opuestos por el vértice. La recíproca es falsa.
6. El capacitador explica que cuando negamos una proposición p obtenemos una nueva

Proyecto sufragado por el Departamento de Educación mediante el programa: Título I Parte A

proposición conocida como la ***negación de p (~p)***. Por ejemplo: ***p: Luis es el gobernador de P.R.***; ***~p: Luis no es el gobernador de P.R.***

7. El capacitador define la ***inversa*** de una proposición condicional (ver glosario) y discute el siguiente ejemplo: $p \rightarrow q$ ***: Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes.*** Contestación: $\sim p \rightarrow \sim q$ **: Si dos ángulos no son opuestos por el vértice, entonces los ángulos no son congruentes.**

8. El capacitador utiliza tablas de verdad para demostrar que el condicional y la inversa no son equivalentes.

P	Q	~p	~q	$p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow \sim q$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

9. El capacitador define la ***contrapuesta o contrarecíproca*** del condicional (ver glosario) y le pide a los participantes que encuentre la contrapuesta de la siguiente proposición condicional: ***Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo que mide 45°, entonces es un triángulo isósceles.*** Contestación: Si un triángulo rectángulo no es isósceles, entonces no tiene un ángulo que mida 45°. El capacitador utiliza tablas de verdad para demostrar que el condicional y la contrapuesta son equivalentes.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	**V**	F	F	**V**
V	F	**F**	V	F	**F**
F	V	**V**	F	V	**V**
F	F	**V**	V	V	**V**

10. El capacitador explica que la recíproca, la inversa y la contrapuesta se conocen como

las variantes del condicional.

11. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 2 (HT2) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 2: Soluciones)
12. El capacitador discute los resultados de la HT2 en grupo grande.

Actividad 3: Uso de la Tecnología (Prueba de Proposiciones Condicionales)

La calculadora gráfica TI-84 Plus puede ser útil para probar la validez de algunas proposiciones condicionales que involucren enunciados matemáticos en una variable.

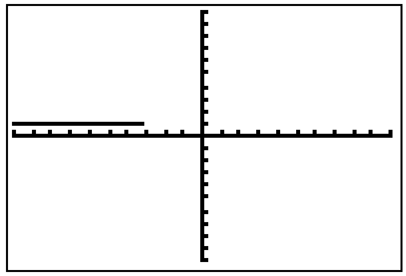
1. El capacitador plantea la siguiente situación y explica cómo resolverla: ***Dada la proposición condicional si 3x + 6 > 4x + 9, entonces x > -3, utiliza una calculadora gráfica para verificar si la conclusión es verdadera.*** La calculadora gráfica nos permite verificar si la conclusión es verdadera.

   a. Entre al editor gráfico presionando [Y=].

   b. Limpie la lista [Y=] oprimiendo la tecla [CLEAR].

   c. En Y_1 escribe $3x + 6 > 4x + 9$. Para ingresar el símbolo > presiona [2nd] [MATH] [3].

   d. Presiona [ZOOM] [6] y aparecerá en la pantalla la gráfica del conjunto solución de la inecuación.



e. Utiliza la función TRACE para explorar los valores a lo largo de la gráfica de la solución.

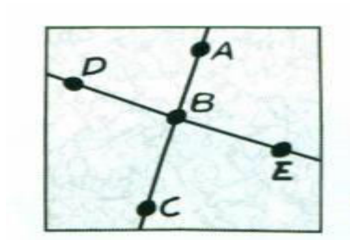
f. Observa que el valor de Y siempre es 1 ó 0. Cuando la proposición 3x + 6 > 4x + 9 es verdadera, el valor de Y es 1. Cuando es falsa, el valor de Y es 0. Así, la hipótesis es verdadera sólo cuando x < -3. Asumiendo la hipótesis de que 3x + 6 > 4x + 9 es verdadera, entonces la conclusión x > -3 es falsa. La condicional correcta debería ser si 3x + 6 > 4x + 9, entonces x < -3.

2. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 3 (HT3) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 3: Soluciones)

3. El capacitador discute los resultados de la HT3 en grupo grande.

Modelación Matemática
Puedes utilizar papel para explorar las medidas de los ángulos opuestos por el vértice.

- Dobla el papel y haz un pliegue. Dobla otra vez el papel de tal modo que el segundo pliegue interseque al primero.
- Abre y con una regla dibuja las dos líneas formadas por los pliegues. Coloca en tu papel las marcas que aparecen en la figura siguiente.



- Dobla el papel por B de tal modo que el $\overrightarrow{BA}$ coincida con el rayo $\overrightarrow{BD}$. ¿Qué puedes afirmar de $\angle DBC \text{ y } \angle ABE$?
- Vuelve a doblar el papel por B de tal manera que el rayo $\overrightarrow{BA}$ coincida con el rayo $\overrightarrow{BE}$. ¿Qué puedes afirmar de $\angle ABD \text{ y } \angle EBC$?

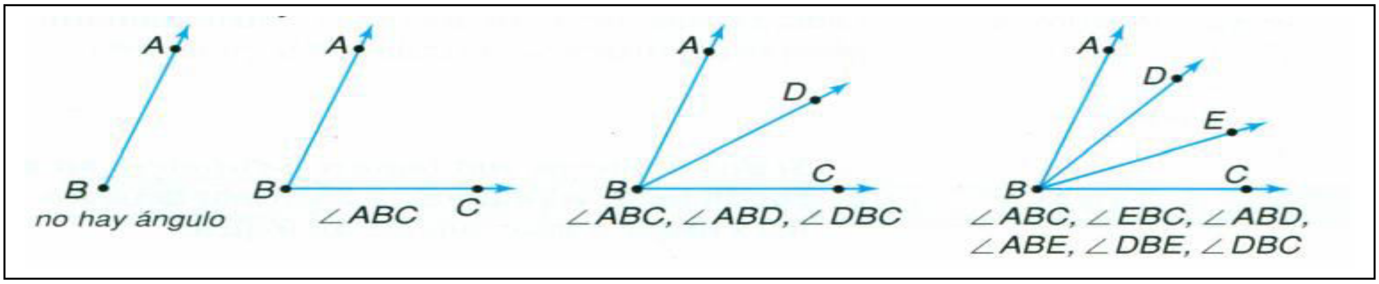
Tu turno
Formula una conjetura acerca de los pares de ángulos opuestos formados por la intersección de dos rectas cualesquiera.

Actividad 4: Razonamiento deductivo

En la actividad anterior de Modelación matemática descubriste un patrón con ángulos opuestos por el vértice y obtuviste una conclusión. Buscar un patrón es un buen camino para hacer una conjetura.

1. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes para que la resuelvan: ***Determine el número de ángulos formados por 10 rayos diferentes con el punto inicial común.***
2. Una posible forma de resolverlo es haciendo una tabla y buscando un patrón en el número de ángulos formados (ver la siguiente figura).

Proyecto sufragado por el Departamento de Educación mediante el programa: Título I Parte A



Número de rayos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Número de ángulos formados	0	1	3	6	10	¿?	¿?	¿?	¿?

Después de trazar la figura con 5 rayos, puedes concluir que una figura con 6 rayos forma 10 + 5 = 15 ángulos, una figura con 7 rayos forma 15 + 6 = 21 ángulos, una figura con 8 rayos forma 21 + 7 = 28 rayos, una figura con 9 rayos forma 28 + 8 = 36 rayos y una figura con 10 rayos forma 36 + 9 = 45 rayos. Para verificar tu conjetura de que una figura con 10 rayos forma 45 ángulos, puedes construir una figura con 10 rayos y contar todos los ángulos. Aunque esto puede ser confuso y aburrido, encontrarás que tu conjetura es verdadera. Descubrirás también que es más fácil resolver el problema buscando un patrón.

3. El capacitador explica que hallar un patrón no garantiza que una proposición sea siempre verdadera. Es necesario probar una proposición para asumir que es absolutamente verdadera para todos los casos. De manera similar, si tenemos 1000 ejemplos en donde los ángulos opuestos por el vértice son congruentes, no es suficiente para asumir que es verdad en todos los casos. Más adelante probaremos el teorema sobre los ángulos opuestos por el vértice.

4. El capacitador explica que para poder probar proposiciones necesitamos algunas "herramientas" del oficio. Plantea la siguiente proposición, El 3 de junio de 1996, en la revista *People*, Della Reese hizo la siguiente afirmación acerca de Roma Downey del drama de TV *Tocado por un ángel*: ***"Si tú no puedes mirar a Roma y ver que ella es dulce, amorosa y tierna, entonces yo no sé qué puedo decirte".***

   La hipótesis verdadera del condicional diría: *Una persona no puede observar a Roma y ver que ella es dulce, amorosa y tierna.*

   Conclusión verdadera del condicional diría: *Della Reese no sabe qué puede decir a esa persona*.

   Esta forma de razonar utilizada en una demostración se denomina **Ley de separación**. La ley de separación nos ofrece un camino para encontrar conclusiones de proposiciones condicionales (si-entonces). Establece que cuando una condicional es verdadera y su hipótesis es verdadera, asumimos que la conclusión es verdadera (ver glosario).

   La ley de separación y otras leyes de la lógica se pueden utilizar para proporcionar un sistema que lleve a conclusiones lógicas. Este sistema se llama razonamiento deductivo (ver glosario). El ***razonamiento*** deductivo es una de las piedras angulares del estudio de la geometría.

Nota El razonamiento deductivo parte de una regla para obtener una conclusión, mientras el razonamiento inductivo parte de ejemplos para obtener una regla o conjetura.

5. El capacitador platea el siguiente ejemplo: La condicional s***i dos números son***

impares, entonces su suma es par es verdadera. Si 3 y 5 son números impares, ¿cuál es la conclusión lógica? Contestación: Al utilizar la ley de separación concluimos que *3 + 5 es par*. El capacitador explica que con una condicional verdadera y una conclusión verdadera, no podemos concluir que la hipótesis es verdadera. Consideremos el siguiente contraejemplo: la suma de 12 y 4 es 16, par, pero 12 y 4 no son impares.

6. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes a contestarla: ***Determina si la proposición (3) es el producto de las proposiciones (1) y (2) por la ley de la separación (asume que la proposición (1) y (2) son verdaderas).***
   (1) Si jugaste béisbol en los juegos olímpicos de verano de 1996, entonces jugaste béisbol en Atlanta en el verano de 1996.
   (2) Greg Maddux (Bravos de Atlanta) jugó béisbol en Atlanta en el verano de 1996.
   (3) Greg Maddux jugó béisbol en los juegos olímpicos de verano de 1996.

   Contestación:

   Hipótesis: Tú jugaste béisbol en los juegos olímpicos de verano de 1996.

   Conclusión: Tú jugaste béisbol en Atlanta en el verano de 1996.

   Dado: Greg Maddux jugó béisbol en Atlanta en el verano de 1996.

   Una opción puede ser concluir que Greg Maddux jugó béisbol en los juegos olímpicos de verano de 1996. En realidad, todos los jugadores de los Bravos de Atlanta jugaron béisbol en Atlanta en el verano de 1996, pero ninguno de ellos participó en las olimpiadas. Por lo tanto, aunque la condicional fuera verdadera y la proposición también, la conclusión a la que llegamos no es válida.

7. El capacitador explica la segunda ley de la lógica, la llamada **Ley del silogismo** (ver glosario), que es semejante a la propiedad transitiva de la igualdad que se estudia en álgebra.
8. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes a resolverla: ***Los noks fueron una de las civilizaciones más primitivas de África, vivieron en el año 500 a.C. Determina si una conclusión válida puede obtenerse a partir de las dos proposiciones verdaderas. Si es una escultura nok, entonces tiene ahuecados los ojos y la boca, y si una escultura tienen ahuecados los ojos y la boca, entonces tiene válvulas de aire que evitaron que se agrietara.*** Contestación: Sean p, q y r las partes de las proposiciones.

   p: Es una escultura nok.

   q: Tiene ahuecados los ojos y la boca.

   r: Tiene válvulas de aire para evitar grietas.

   La proposiciones dadas pueden representarse como $p \to q$ y $q \to r$. Como las proposiciones dadas son verdaderas, utilizamos la ley del silogismo para concluir que $p \to r$, esto es, Si es una escultura nok, entonces tiene válvulas de aire que evitan que se agriete.
9. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 4 (HT4) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 4: Soluciones)
10. El capacitador discute los resultados de la HT4 en grupo grande.

Proyecto sufragado por el Departamento de Educación mediante el programa: Título I Parte A

Actividad 5: Utilidad de la prueba en álgebra

Nota
Estamos familiarizados con muchas propiedades de álgebra. Esas propiedades, con varias operaciones definidas y conjuntos numéricos forman un sistema matemático. Otro ejemplo de un sistema matemático se puede encontrar en geometría. Como la geometría también maneja variables, números y operaciones, muchas de las propiedades del álgebra también se cumplen en geometría. A continuación se presenta una lista de las propiedades importantes del álgebra.

Propiedades de la igualdad en los números reales	
Propiedad reflexiva	Para todo número real a, a = a.
Propiedad simétrica	Para todos los números reales a y b, si a = b, entonces b = a.
Propiedad transitiva	Para todos los números reales a, b y c, si a = b y b = c, entonces a = c.
Propiedad de la adición y la sustracción	Para todos los números reales a, b y c, si a = b, entonces a + c = b + c.
Propiedad de la multiplicación y la división	Para todos los números reales a, b y c, si a = b, entonces ac = bc, si c ≠ 0, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
Propiedad de la sustitución	Para todos los números a y b, si a = b, entonces a puede remplazarse por b en cualquier ecuación o expresión.
Propiedad distributiva	Para todos los números a, b y c, a(b + c) = ab + ac.

Como las medidas de los segmentos u ángulos son números reales, estas propiedades del álgebra se pueden usar para estudiar sus relaciones. Algunos ejemplos de estas aplicaciones se muestran a continuación.

Propiedad	Segmentos	Ángulos
Reflexiva	PQ = PQ	$m\angle 1 = m\angle 1$
Simétrica	Si AB = CD, entonces CD = AB	Si $m\angle A = m\angle B$, entonces $m\angle B = m\angle A$
Transitiva	Si AB = CD y DE = FG, entonces AB = FG	Si $m\angle 1 = m\angle 2$ y $m\angle 2 = m\angle 3$, entonces $m\angle 1 = m\angle 3$

1. El capacitador discute las propiedades con los participantes. El capacitador define simetría con respecto a una línea y simetría con respecto a un punto (ver glosario).
2. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes a resolverla: ***Nombra la propiedad de la igualdad que justifica cada proposición.***

Proposición	***Razón***
a. Si AB + BC = DE + BC, entonces AB = DE.	
b. $m\angle ABC = m\angle ABC$	
c. Si XY = PQ y XY = RS, entonces PQ = RS.	
d. Si $\frac{1}{3}x = 5$***, entonces x = 15.***	
e. Si 2x = 9, entonces x = $\frac{9}{2}$***.***	

Contestación: a. propiedad de la sustracción; b. propiedad reflexiva; c. propiedad de sustitución; d. propiedad de la multiplicación; e. propiedad de la división.

3. El capacitador explica que cada vez que estamos resolviendo una ecuación en una variable los pasos que seguimos tienen que estar justificados por un dato o una propiedad. Plantea la siguiente situación y anima a los participantes a que la resuelvan:

Justifica cada paso en la resolución de $\frac{3x+7}{2} = 15$***. Utiliza la siguiente tabla:***

Proposición	Razón
1. $\frac{3x+7}{2} = 15$	
2. $2\left(\frac{3x+7}{2}\right) = 2(15)$	
3. $3x+7=30$	
4. $3x=23$	
5. $x=\frac{23}{3}$	

El ejemplo anterior es una prueba de la condicional si $\frac{3x+7}{2} = 15$, entonces $x=\frac{23}{3}$. La información dada viene de la hipótesis de la condicional. Es el punto de partida de la prueba o demostración. La conclusión $x=\frac{23}{3}$ es el último paso de la demostración. Las razones (propiedades) enunciadas en cada paso guían la secuencia para llegar a la conclusión de la demostración. Este tipo de demostración se conoce como **Demostración en dos columnas**.

Las demostraciones en geometría pueden organizarse de la misma manera. En geometría las propiedades, definiciones, postulados y teoremas previamente probados se pueden utilizar como razones.

4. El capacitador discute el siguiente ejemplo: ***Justifica los pasos de la demostración de la condicional si PR = QS, entonces PQ + RS (recuerda que PR, QS, PQ y RS representan números reales).***

Dado: PR = QS

Prueba: PQ = RS

Demostración:

Proposición	Razón
1. PR = QS	Dado (es la hipótesis)
2. PQ + QR = PR QR + RS = QS	Postulado de adición de segmentos
3. PQ + QR = QR + RS	Propiedad de la sustitución (utilizamos la información de los pasos 1 y 2)
4. PQ = RS	Propiedad de la sustracción

5. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 5 (HT5) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 5: Soluciones)
6. El capacitador discute los resultados de la HT5 en grupo grande.

Actividad 6: Verificación de las relaciones entre segmentos

1. El capacitador pregunta ¿cuál es la definición de congruencia de segmentos? Y dirige

la discusión para llegar a una definición equivalente a la siguiente: Dos segmentos $\overline{AB}\ y\ \overline{CD}$ son congruentes si y solo si $AB = CD$, en tal caso escribimos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

2. El capacitador plantea la siguiente situación y alienta a los participantes a que la resuelvan: ***En el siguiente mapa de recorridos en millas de EE.UU., encuentra dos pares de ciudades que ilustren la definición de congruencia de segmentos. Describe esa relación.***

Contestación: La distancia desde Jackson hasta New Orleans es 180 millas. La distancia desde Texarkana hasta Lake Village es 180 millas. Por lo tanto, el segmento que une Jackson con New Orleans es congruente al segmento que une Texarkana con Lake Village.

3. El capacitador le pide a los participantes que encuentren tres pares de ciudades que ilustren la propiedad transitiva de la igualdad y describan la relación. Contestación: Si la distancia de Memphis a Corinth es la misma que de Birmingham a Montgomery y la

distancia de Birmingham a Montgomery es la misma que de Jackson a Meridian, entonces la distancia Memphis a Corinth es la misma que de Jackson a Meridian.

4. El capacitador plantea el siguiente teorema: ***La congruencia de segmentos es reflexiva, simétrica y transitiva.***

   Propiedad reflexiva: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

   Propiedad simétrica: Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.

   Propiedad transitiva: Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

   En las demostraciones geométricas puedes utilizar las propiedades del álgebra. El capacitador utiliza la propiedad simétrica de la igualdad para demostrar la parte simétrica del teorema.

   Dado: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

   Prueba: $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

   Demostración:

Proposición	Razón
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Dado
$AB = CD$	Definición de segmentos congruentes
$CD = AB$	Propiedad simétrica (=)
$\overline{CD} \cong \overline{AB}$	Definición de congruencia de segmentos

5. El capacitador anima a los participantes para que demuestren la parte transitiva del teorema.

   Dado: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{DC} \cong \overline{EF}$

   Prueba: $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

   Demostración:

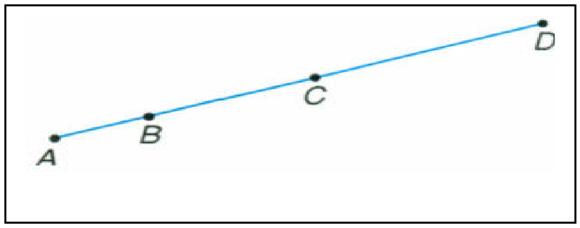
Proposición	Razón
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{DC} \cong \overline{EF}$	Dado
$AB = CD$ y $DC = EF$	Definición de segmentos congruentes
$AB = EF$	Propiedad transitiva (=)
$\overline{AB} \cong \overline{EF}$	Definición de congruencia de segmentos

6. El capacitador le pide a los participantes que demuestren la siguiente proposición: ***Si*** $\overline{ABCD}$***, entonces AD = AB + BC + CD (ver figura).***

   Dado: $\overline{ABCD}$

   Prueba: $AD = AB + BC + CD$

   Demostración:



Proposición	Razón
$\overline{ABCD}$	Dado
$AD = AB + BD$	Postulado de adición de segmentos
$BD = BC + CD$	Postulado de adición de segmentos
$AD = AB + BC + CD$	Propiedad de sustitución (=)

7. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 6 (HT6) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 6: Soluciones)
8. El capacitador discute los resultados de la HT6 en grupo grande.

Proyecto sufragado por el Departamento de Educación mediante el programa: Título I Parte A

III Cierre

1. Cada grupo retoma los papelotes desarrollados en el inicio para reflexionar acerca de los aprendizajes en la capacitación (*assessment* final). Se le permite a los participantes que hagan los cambios que sean pertinentes. Se discute con los participantes los cambios propuestos y la razón por qué los hicieron.

<u>Bibliografía:</u>

Burrill, G., Cummins, J., Kanold, T., Boyd, C., Malloy, C. y Yunker, L. (2004). *Geometría: Interpretación aplicación y conexiones.* McGraw Hill, México.

Departamento de Educación (2011). *Estándares de Contenido y Expectativas de Grado: Programa de Matemáticas.*

Miller, C., Heeren, V. y Hornsby, J. (2004). *Matemática: razonamiento y aplicaciones, decimal edición*. Pearson, México.

Moise, Edwin E. (1974). *Elementary geometry from an advanced standpoint, second edition*. Addison-Wesley, California.

Moise, Edwin E. (1966). *Geometría Moderna*. Addison-Wesley, California.