RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES
GUÍA DEL MAESTRO

Autor: Dr. Edwin Morera González

Materia: Matemáticas **Nivel:** 7-9

Conceptos Principales: Rectas paralelas y perpendiculares

Conceptos Secundarios: Distancia entre puntos, planos, pendiente y geometría esférica.

Conocimiento previo: Plano cartesiano, recta y pendiente.

Objetivos específicos:

Durante la actividad el participante:

1. Resolverá problemas trazando diagramas.
2. Aplicará las propiedades de las rectas paralelas.
3. Utilizará la pendiente para identificar rectas paralelas.
4. Utilizará la pendiente para identificar rectas perpendiculares.
5. Demostrará que dos rectas son paralelas.
6. Aplicará las relaciones de distancia entre puntos, rectas y planos.
7. Analizará las propiedades de la geometría esférica.

Estándares, Expectativas e Indicadores por Grado:
ESTÁNDAR DE CONTENIDO 3: GEOMETRÍA
El estudiante es capaz de identificar formas geométricas, analizar sus estructuras, características, propiedades y relaciones para entender y descubrir el entorno físico.

Séptimo
Relaciona y aplica las transformaciones rígidas.
G.TS.7.13.1 Describe el efecto de transformaciones rígidas (traslación, reflexión respecto a líneas verticales u horizontales, rotación respecto al origen y composiciones simples) en figuras en el plano de coordenadas.
G.TS.7.13.2 Utiliza transformaciones rígidas para identificar las partes correspondientes de figuras congruentes.

Noveno

5.0 Identifica figuras congruentes y justifica estas congruencias estableciendo condiciones suficientes y hallando las transformaciones que preservan la congruencia entre las figuras. Resuelve problemas que involucran la congruencia en una variedad de contextos.
G.TS.9.5.1 Analiza figuras en términos de sus simetrías por medio de los conceptos reflexión,

Proyecto sufragado por el Departamento de Educación mediante el programa: Título I Parte A

rotación y traslación; y una combinación de éstas.

G.FG.9.5.2 Compara y contrasta la igualdad, la congruencia y la semejanza.

G.FG.9.5.3 Identifica, contrasta, diferencia y aplica las condiciones suficientes para la congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA, AAL, HL).

G.TR.9.5.4 Utiliza la geometría de coordenadas y las transformaciones rígidas (reflexiones, traslaciones y rotaciones) para establecer la congruencia de figuras.

6.0 Identifica y aplica las transformaciones de figuras en el plano de coordenadas y discute los resultados de estas transformaciones.

G.TS.9.6.1 Representa traslaciones, reflexiones respecto a una línea, rotaciones y dilataciones (centradas en el origen) de objetos en el plano de coordenadas por medio de trazos, coordenadas, notación de funciones y matrices, y explica los efectos de estas transformaciones.

G.TS.9.6.2 Reconoce e identifica las partes correspondientes de figuras congruentes y semejantes luego de una transformación.

Trasfondo:

La mente del ser humano cuando se usa inteligentemente no tiene límites. Las matemáticas son un ejemplo de esto, nos ha abierto las puertas de muchos caminos científicos. Cada descubrimiento conduce a muchos otros formando una cadena interminable. Los incontables tesoros de la ciencia están guardados tras estas puertas, que en su momento serán abiertas por las mentes estudiosas de futuras generaciones.

La geometría es la parte de las matemáticas que estudia el espacio y las formas, lo cual es la base de todas las cosas que existen. Por lo tanto, entenderla es un paso necesario para comprender cómo está construido el mundo. La mayoría de las personas tienen clases de geometría en sus cursos preparatorios y aprenden sobre, líneas, triángulos, ángulos, etc. Su aplicación en la vida real no siempre resulta evidente para los jóvenes, pero la realidad es que la geometría está infiltrada en cada faceta de nuestra vida diaria. El estudio de la geometría es indispensable para el desarrollo de la mente de los seres humanos.

Por ejemplo, las estadísticas muestran que hay un creciente número de personas que practican el deporte del esquí. En la antigüedad, los escandinavos utilizaron los esquís como medio de transporte sobre la nieve. El deporte del esquí comenzó en Noruega en el siglo XIX y ha venido ganando popularidad. Hoy cerca de una cuarta parte de los esquiadores de EE.UU. están entre 7 y 17 años. Una de las claves para el descenso es tener los esquís ***paralelos***.

En esta capacitación estaremos estudiando las rectas paralelas y perpendiculares. Y como al negar el postulado de las paralelas, surge una nueva geometría, conocida como *geometría no euclidiana,* tan consistente como la euclidiana.

Glosario:

Rectas Coplanarias: Dos rectas l_1 y l_2 son coplanarias si pertenecen al mismo plano.

Rectas paralelas: Dos rectas l_1 y l_2 son paralelas ($l_1 \parallel l_2$), si son coplanarias y no se interceptan.

Rectas oblicuas: Dos rectas son oblicuas si no se intersecan y no están en el mismo plano.

Recta transversal: Una recta que interseca a dos o más rectas en un plano, en diferentes puntos.

Postulado: Es una proposición no evidente por sí misma, ni demostrada, pero se acepta ya que no existe otro principio del que pueda ser deducida.

Teorema: Proposición que puede ser demostrada de forma lógica a partir de un postulado u otros teoremas que fueron demostrados anteriormente.

Ángulos suplementarios: Dos ángulos cuyas medidas suman 180º.

Pendiente de una recta: La pendiente *m* de una recta que contiene dos puntos con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad x_1 \neq x_2$$

$$= \frac{Cambio\, vertical\,(elevación)}{Cambio\, horizaontal\,(desplazamiento)}.$$

<u>Materiales y equipo</u>:

1. Papelotes
2. Bola de baloncesto
3. Marcadores
4. Cinta adhesiva
5. Reglas (una para cada participante)
6. Lápices a colores
7. Papel cuadriculado
8. Compás (uno para cada participante)
9. Calculadoras gráficas *TI-84 Plus*
10. Computadora
11. Proyector digital (*Infocus*)

<u>Proceso Educativo</u>:

I. Pre y Pos prueba

1. Se evaluará el conocimiento de los participantes antes de la capacitación con la Preprueba y el conocimiento después con la Posprueba (documentos adjuntos).

II. Assessment Continuo

1. Obviamente la preprueba y la posprueba son parte del assessment de la capacitación. Es la primera ayuda al capacitador para tomar decisiones acerca del conocimiento que tiene el participante del tema y de las próximas actividades que llevará a cabo. Mientras la posprueba ayuda al capacitador a tomar decisiones de la necesidad de re enseñanza en próximas capacitaciones.
2. Las hojas de trabajo, el capacitador las utilizará como assessment. Los participantes estarán cotejando su aprendizaje en la medida que se discutan las mismas en grupo grande. Además, el capacitador las corrige y las utilizarlas para tomar decisiones.
3. Durante todas las actividades el capacitador estará haciendo observaciones mientras se mueve entre los grupos, cuando los participantes discuten en grupo y cuando presentan sus respuestas a las preguntas. Esto le permite hacer conclusiones del aprendizaje de éstos y los próximos pasos a seguir.

Primera parte

I. **Inicio:** *Explorando las concepciones previas*

1. La actividad está diseñada para indagar el conocimiento que tienen los participantes acerca de rectas paralelas, perpendiculares y transversales.
   i. Se dividen los maestros en cuatro o cinco grupos.
   ii. El capacitador le pide a cada grupo que, en un papelote, conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Qué son rectas paralelas?
2. ¿Qué son rectas perpendiculares?
3. ¿Qué condiciones son necesarias para que una recta sea transversal?

iii. Cada grupo presenta sus contestaciones al grupo grande. El capacitador y los participantes no pasarán juicio sobre lo presentado. El capacitador estará observando las contestaciones e identificará concepciones erróneas, si las hay, para luego, a través de la capacitación, hacer énfasis en las mismas y corregirlas. En el cierre de la capacitación los participantes volverán a revisar las contestaciones de las preguntas y harán los arreglos pertinentes. De esta forma tendrán la oportunidad de percatarse de los posibles errores y corregirlos, mientras el capacitador tendrá un assessment final.

II. Desarrollo

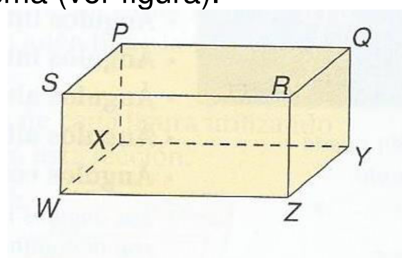
Actividad 1: Rectas paralelas y transversales

1. El capacitador plantea la siguiente pregunta: ***¿Qué condiciones deben cumplirse para que dos rectas sean paralelas?***

   Permite que los participantes discutan y guía la discusión para que los participantes definan rectas paralelas. Esta definición debe ser equivalente a la siguiente: ***Dos rectas l_1 y l_2 son paralelas ($l_1 \parallel l_2$) si son coplanarias (ver definición) y no se interceptan***. Recuerden que en geometría el símbolo ‖ significa *paralelo a*. El término paralelo y la notación ‖ son utilizadas para rectas, segmentos, rayos y planos. El capacitador explica que de forma semejante, dos planos se pueden intersecar o ser paralelos. Cuando tenemos un edificio los pisos década nivel representan planos paralelos. Las paredes y el piso de cada nivel representan planos que se intersecan.

Modelación Matemática: Dibuja un prisma rectangular
Un prisma rectangular se parece a una caja de zapatos o de cereal. Tú puedes trazar el diagrama de un prisma rectangular dibujando planos paralelos.

- Traza dos figuras para representar las bases superior e inferior del prisma.
- Traza las aristas verticales.
- Señala las aristas ocultas con líneas punteadas.
- Marca los vértices del prisma (ver figura).

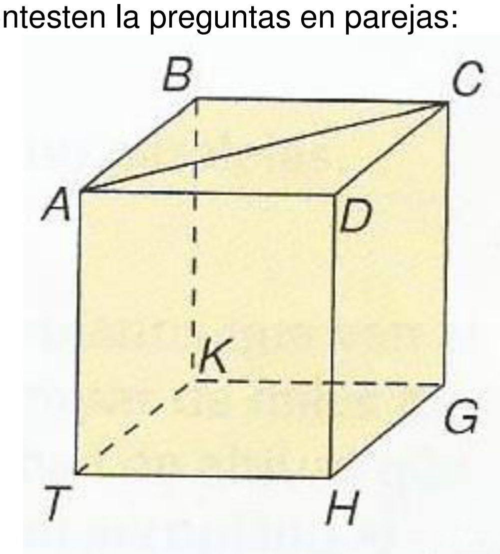


Contesta las siguientes:

a. Nombra los planos paralelos.
b. Nombra los planos que intersecan al plano PQR y su intersección.
c. ¿Las rectas $\overleftrightarrow{QR}$ y $\overleftrightarrow{WZ}$ son paralelas? Explique

2. El capacitador explica que las rectas $\overleftrightarrow{QR}$ y $\overleftrightarrow{WZ}$ no cumplen la definición de rectas paralelas, pues aunque no se intersecan **no** son coplanarias. Aprovecha y define rectas oblicuas (ver glosario).

3. El capacitador plantea la siguiente situación: Analice la siguiente figura y anima a los participantes para que contesten la preguntas en parejas:



Pregunta: Nombre todos los planos que son paralelos al plano *ABC*. Contestación: Plano TKG

Pregunta: Nombra todos los segmentos que intersecan a $\overline{AB}$. Contestación: $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AT}$ y $\overline{BK}$.

Pregunta: Nombra todos los segmentos que son paralelos a $\overline{KG}$. Contestación: $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{TH}$.

Pregunta: Nombra todos los segmentos oblicuos a $\overline{TK}$. Contestación: $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

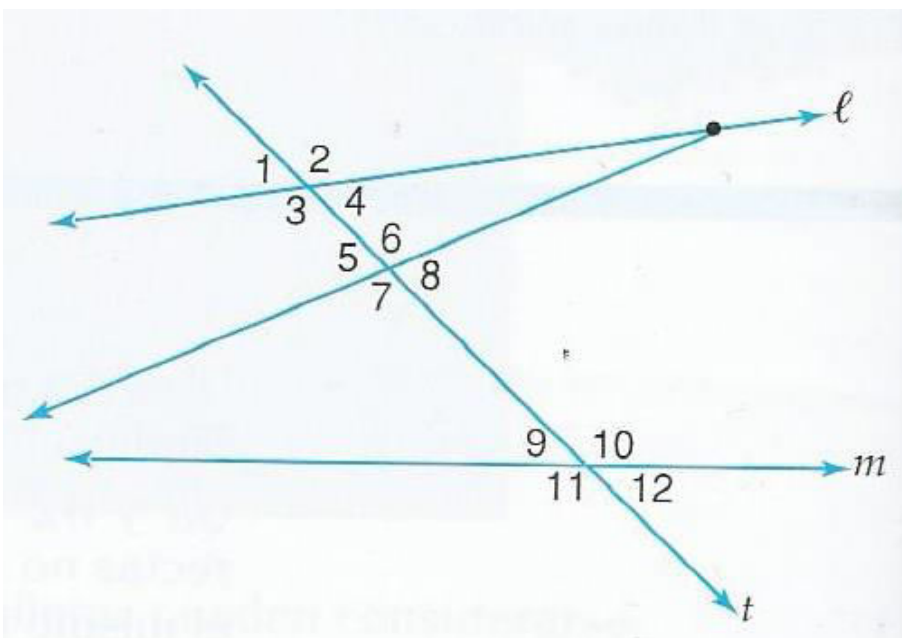
4. El capacitador presenta la siguiente ilustración que muestra un campo irrigado y la utiliza para definir recta trasversal (ver glosario):

Una transversal también puede ser un rayo o un segmento de recta.

Explica y muestra en la figura que cuando la transversal *t* interseca a las rectas *l* y *m,* se forman ocho ángulos que tienen los siguientes nombres:

- Ángulos exteriores o externos $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
- Ángulos interiores o internos $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
- Ángulos interiores consecutivos $\angle 3, \angle 5, \angle 4, \angle 6$
- Ángulos alternos externos $\angle 1, \angle 8, \angle 2, \angle 7$
- Ángulos alternos internos $\angle 1, \angle 5, \angle 2, \angle 6$
- Ángulos correspondientes $\angle 3, \angle 7, \angle 4, \angle 8$

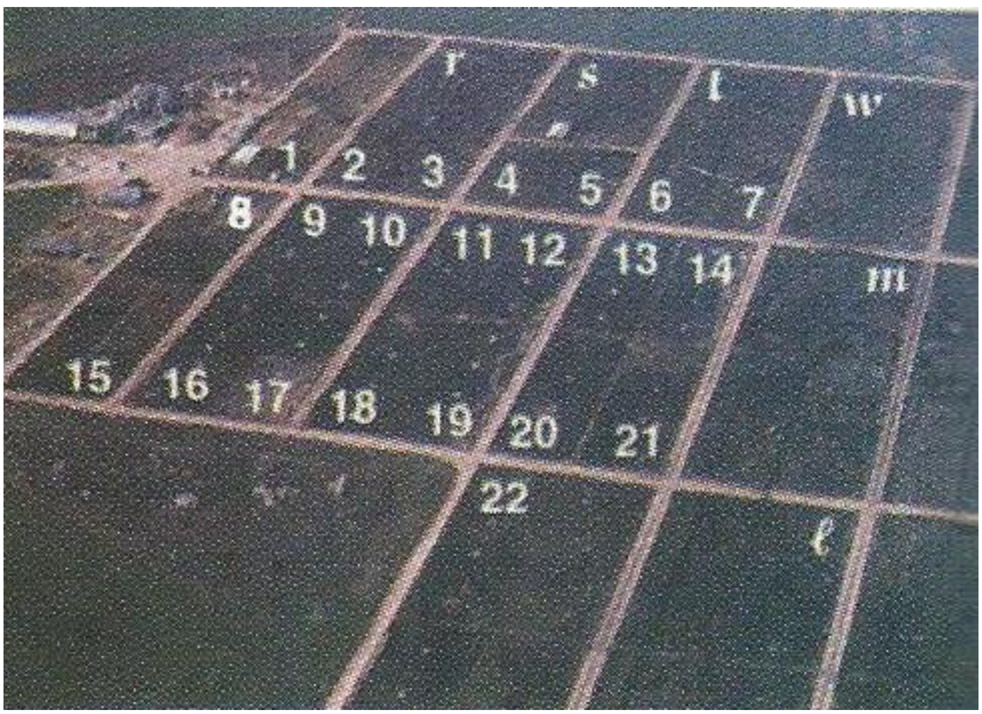
5. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes a que la resuelvan: ***En la siguiente figura identifica cada par de ángulos como alternos internos, alternos externos, correspondientes o consecutivos interiores:***



- $\angle 1$ y $\angle 8$ Contestación: alternos externos
- $\angle 7$ y $\angle 10$ Contestación: alternos internos

- $\angle 8 \ y \ \angle 12$ Contestación: correspondientes
- $\angle 1 \ y \ \angle 5$ Contestación: correspondientes
- $\angle 4 \ y \ \angle 6$ Contestación: interiores consecutivos
- $\angle 8 \ y \ \angle 9$ Contestación: Alternos internos

6. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes a que la resuelvan: ***Texas es el principal productor de ganado en los EE.UU. La siguiente figura muestra líneas transversales en un terreno de cultivo.***



- Identifica todas las transversales a las rectas *ℓ y m.* Contestación: *r, s, t, w*
- Identifica el nombre especial que se da a cada par de ángulos.
  - $\angle 2 \ y \ \angle 10$ Contestación: ángulos alternos internos
  - $\angle 19 \ y \ \angle 12$ Contestación: ángulos interiores consecutivos
  - $\angle 15 \ y \ \angle 17$ Contestación: ángulos correspondientes

7. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 1 (HT1) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 1: Soluciones)
8. El capacitador discute los resultados de la HT1 en grupo grande.

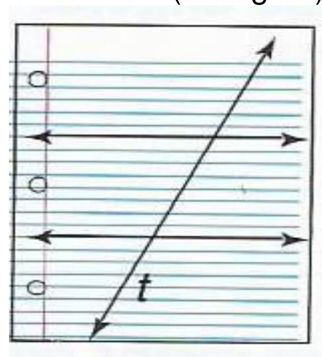
Actividad 2: Ángulos y rectas paralelas

1. El capacitador explica que podemos utilizar la calculadora TI-84 Plus para investigar las medidas de los ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal. Utiliza el Anejo 1 para explicar cómo trazar rectas paralelas, recta transversal y medir ángulos.
2. El capacitador explica que si no tenemos calculadoras podemos medir ángulos y hacer conjeturas.

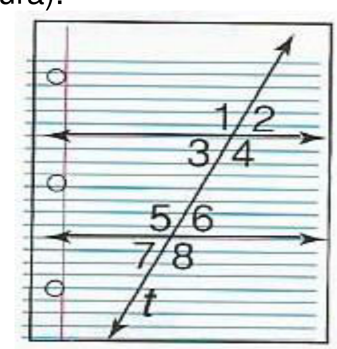
Modelación Matemática: Medidas de ángulos

Puedes trazar rectas paralelas sobre las líneas de la hoja de tu libreta.

- Con una regla y un lápiz oscurece dos pedazos de líneas de tu libreta y con la regla traza una trasversal *t* que las corte (ver figura).



- Marca cada ángulos (ver figura).



- Con el transportador, mide cada uno de los ángulos y compara la medida de los ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos.
- Elabora una conjetura acerca de los ángulos correspondientes formados por dos paralelas cortadas por una transversal.
- Elabora una conjetura acerca de los ángulos alternos internos formados por dos paralelas cortadas por una transversal.
- Elabora una conjetura acerca de los ángulos alternos externos formados por dos paralelas cortadas por una transversal.

3. El capacitador define lo que es un ***postulado*** (ver glosario) en la geometría y plantea el ***postulado de ángulos correspondientes***: ***Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces cada par de ángulos correspondientes es congruentes.***

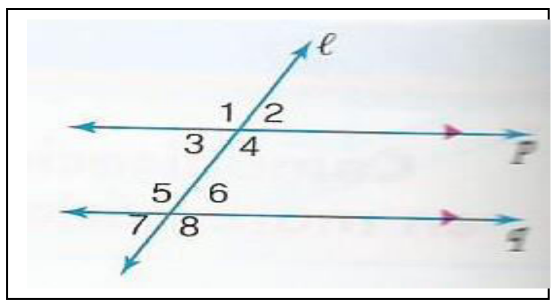
Este postulado, combinado con las propiedades de par lineal y de los ángulos opuestos por el vértice, ayudan a establecer algunas relaciones entre ángulos.

4. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes a resolverla: ***La carretera representada en la siguiente figura divide una finca en dos partes. Los bordes apuestos del campo so paralelos, y la carretera es una transversal. Si*** $m\angle 6 = 115$ ***, determina la*** $m\angle 3$ ***.***

Contestación:
$$\begin{array}{ll} m\angle 6 = m\angle 2 & \textit{Postulado de ángulos correspondientes} \\ m\angle 2 = m\angle 3 & \textit{Ángulos opuestos por el vértice} \\ m\angle 6 = m\angle 3 & \text{Pr}\textit{opiedad transitiva}\,(=) \\ 115 = m\angle 3 & \textit{Propiedad de sustitución}\,(=) \end{array}$$

5. El capacitador explica lo que es un teorema y plantea el siguiente y lo demuestra (ver glosario).

Teorema de ángulos alternos internos: Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces cada par de ángulos alternos internos son congruentes.



Demostración (ver figura):

Dado: $p \parallel q$
l *es una transversal de* p *y* q.

Prueba: $\angle 5 \cong \angle 4, \angle 6 \cong \angle 3$

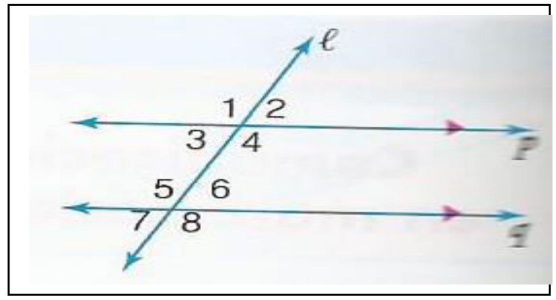
Proposición	Razón
1. $p \parallel q$ l *es una transversal de* p *y* q.	Dado
2. $\angle 5 \cong \angle 1$ y $\angle 6 \cong \angle 2$	Postulado ángulos correspondientes
2. $\angle 1 \cong \angle 4$ y $\angle 2 \cong \angle 3$	Ángulos opuestos por el vértice son congruentes
3. $\angle 5 \cong \angle 4$ y $\angle 6 \cong \angle 3$	Congruencia de ángulos es transitiva

6. El capacitador plantea el siguiente teorema y anima a los participantes para que lo

demuestren.

Teorema de ángulos interiores consecutivos: Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces cada par de ángulos interiores consecutivos son suplementarios (ver glosario).

Demostración:



Dado: $p \text{ P} q$
$l \text{ es una transversal de } p \text{ y } q.$

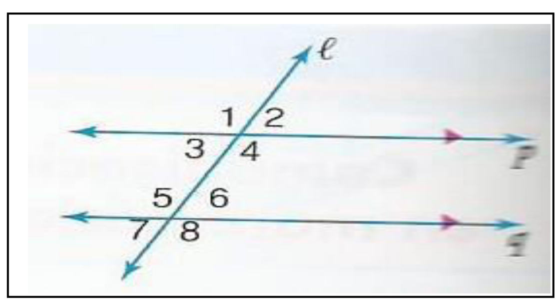
Prueba: $m\angle 5 + m\angle 3 = 180^{\circ},\ m\angle 6 + m\angle 4 = 180^{\circ}$

Proposición	Razón
1. $p \text{ P} q$ $l \text{ es una transversal de } p \text{ y } q.$	Dado
2. $m\angle 5 + m\angle 6 = 180^{\circ} \text{ y } m\angle 4 + m\angle 3 = 180^{\circ}$	Forman un par lineal
2. $m\angle 6 = m\angle 3$	Teorema ángulos alternos internos
3. $m\angle 5 + m\angle 3 = 180^{\circ},\ m\angle 6 + m\angle 4 = 180^{\circ}$	Propiedad sustitución (=)

7. El capacitador plantea el siguiente teorema y anima a los participantes para que lo demuestren.

Teorema de ángulos alternos externos: Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces cada par de ángulos alternos externos son congruentes entre si.

Demostración:



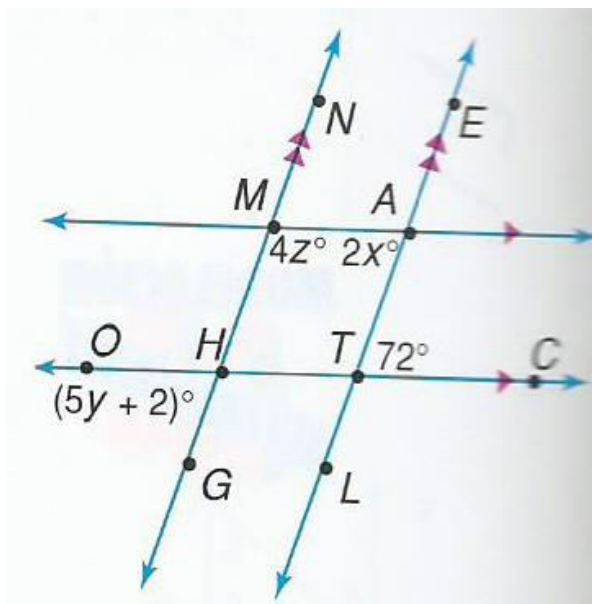
Dado: $p \text{ P} q$
$l \text{ es una transversal de } p \text{ y } q.$

Prueba: $\angle 1 \cong \angle 8,\ \angle 2 + \angle 7$

Proposición	Razón
4. $p \parallel q$ l *es una transversal de* p *y* q.	Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 5$ *y* $\angle 2 \cong \angle 6$	Postulado ángulos correspondientes
5. $\angle 5 \cong \angle 8$ *y* $\angle 6 \cong \angle 7$	Ángulos opuestos por el vértice
6. $\angle 1 \cong \angle 8, \angle 2 \cong \angle 7$	Congruencia de ángulos es transitiva

8. El capacitador plantea la siguiente situación para que los participantes la resuelvan utilizando los teoremas discutidos: ***En la siguiente figura*** $\overleftrightarrow{MA} \parallel \overleftrightarrow{HT}$ *y* $\overleftrightarrow{NG} \parallel \overleftrightarrow{EL}$***.***

Determine los valores de x, y **y** ***z.***



Contestación:

$$m\angle MAT = m\angle ATC \quad \textit{Definición ángulos congruentes}$$

Determina x. $2x = 72 \quad m\angle MAT = 2x, m\angle ATC = 72$

$$x = 36$$

Proyecto sufragado por el Departamento de Educación mediante el programa: Título I Parte A

Determina z.

$$
\begin{aligned}
&m\angle GMA + m\angle TAM = 180 \quad \textit{Definición ángulos suplementarios}\\
&4z + 2x = 180 \quad m\angle GMA = 4z,\ m\angle TABM = 2x\\
&4z + 2(36) = 180 \quad \textit{Sustituir a } x \textit{ por } 36\\
&4z + 72 = 180\\
&4z = 108\\
&z = 27
\end{aligned}
$$

Determina y.

$$
\begin{aligned}
&m\angle GHO = m\angle ATC \quad \textit{Definición ángulos congruentes}\\
&5y + 2 = 72 \quad m\angle GHO = 5y,\ m\angle ATC = 72\\
&5y = 70\\
&y = 14
\end{aligned}
$$

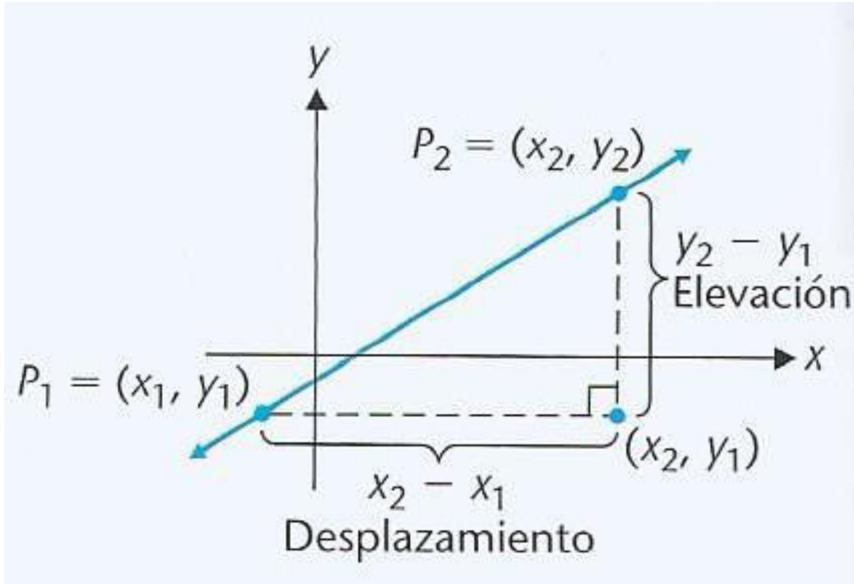
9. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 2 (HT2) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 2: Soluciones)
10. El capacitador discute los resultados de la HT2 en grupo grande.

Nota
Snowbird Ski Resort está localizado en Wasatchcache National Forest en las afueras de Salt Lake City, Utah. La base del resort está a una altura de 7,900 pies. La pista más alta de esquí comienza en Hidden Peak con una elevación de 11,000 pies. Un folleto sobre Snowbird Resort afirma que el ascenso vertical de la montaña es de 11,000-7,900 o 3,100 pies. Los esquiadores algunas veces se refieren a esto como la ***pendiente*** de la montaña.

Obtenido del libro Burril, G., Cummins, J., Kanold, T., Malloy, C. y Yunker, L. (2004). Geometría: Integración, aplicaciones y conexiones. MaGraw-Hill, México.

Actividad 3: Pendientes de rectas (Integración al álgebra)

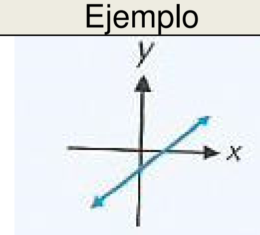
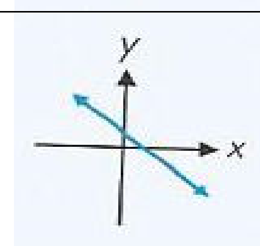
1. El capacitador explica que en un plano cartesiano, la pendiente de una recta es la razón entre el cambio en la variable dependiente (elevación) y el cambio en la variable independiente (desplazamiento) y define el concepto (ver glosario).
2. El capacitador utiliza el siguiente ejemplo para mostrar la pendiente.

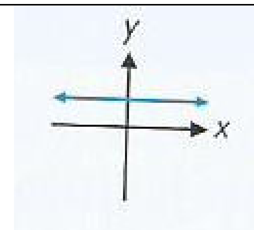
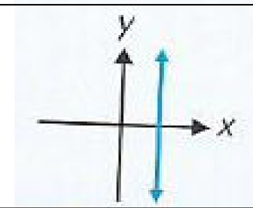


El capacitador explica que para una recta horizontal, el valor de *y* no cambia cuando *x* cambia, de manera que su pendiente es 0. Mientras, para una recta vertical, el valor de *x* no cambia cuando *y* cambia, de manera que su pendiente no está definida:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{0} \quad para\, una\, recta\, vertical,\ la\ pendiente\, no\, está\, definida.$$

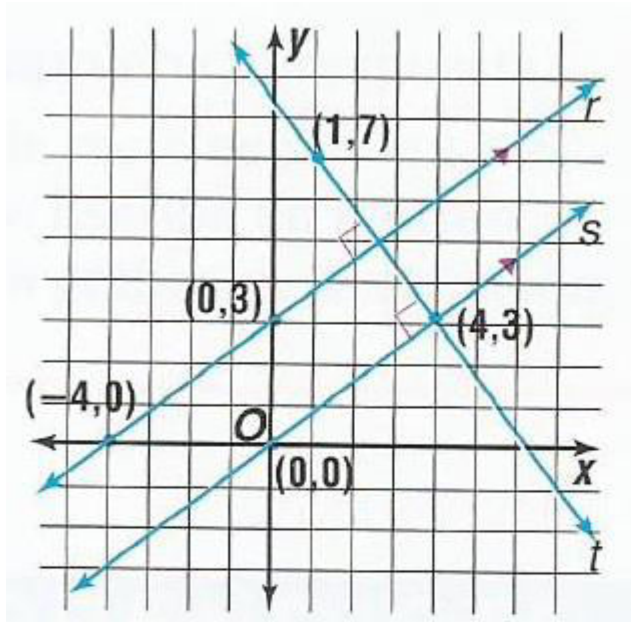
En general, la pendiente de una recta puede ser positiva, negativa, 0 o no definida. Cada una de estos casos se interpreta geométricamente como muestra la siguiente tabla.

Recta	Pendiente	Ejemplo
Elevación: cuando *x* se mueve de izquierda a derecha los valores de *y* aumentan.	Positiva	
Descenso: cuando *x* se mueve de izquierda a derecha los valores de *y* disminuyen.	Negativa	

Horizontal: los valores de *y* son constantes.	0	
Vertical: los valores de x son constantes.	No definida	

3. El capacitador plantea los siguientes ejercicios y anima a los participantes para que los resuelva: ***Determina la pendiente de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos, luego traza la gráfica de la recta en el plano cartesiano y muestra la elevación y el desplazamiento.***
    - ***(0, 2) y (7, 3)***
    - ***(-1, 6) y (4, 2)***
    - ***(-2, 3) y (8, 3)***
    - ***(3, 2) y (3, -4)***
4. El capacitador utiliza el Anejo 2 para mostrar cómo utilizar la calculadora gráfica para determinar la pendiente.

5. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes a resolverla: ***Las gráficas de r, s y t se muestran en la siguiente figura.***



Las rectas r y s son paralelas, y t es perpendicular a r y a s. Determinemos las pendientes de estas rectas y verifiquemos si hay alguna relación.

Contestación:

Pendiente de *r*	Pendiente de *s*	Pendiente de *t*
$m_r = \frac{0-3}{-4-0} = \frac{3}{4}$	$m_s = \frac{0-3}{0-4} = \frac{3}{4}$	$m_t = \frac{3-7}{4-1} = \frac{-4}{3}$

Las pendientes *r* y *s* son paralelas y sus pendientes son iguales. La recta *t* es perpendicular a las rectas *r* y *s* y su pendiente es la inversa del recíproco de las pendientes de *r* y *s*. Estos dos resultados sugieren dos propiedades importantes del álgebra aplicadas a rectas paralelas y perpendiculares.

6. El capacitador presenta los siguientes postulados:

Postulado: Dos rectas no verticales tienen la misma pendiente si y sólo si son paralelas.

Postulado: Dos rectas no verticales son perpendiculares si y solo si el producto

de sus pendientes es -1.

Explica que, si y sólo si, implica que tanto la condicional como su recíproca son verdaderas.

7. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes para que la resuelvan: ***Dado A(-3, -2), B(9, 1), C(3, 6), y D(5, -2), determine si*** $\overleftrightarrow{AB}$ ***es paralela o perpendicular a*** $\overleftrightarrow{CD}$***.***

   Contestación:

   Pendiente de $\overleftrightarrow{AB} = \frac{1-(-2)}{9-(-3)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

   Pendiente de $\overleftrightarrow{CD} = \frac{-2-6}{5-3} = \frac{-8}{2} = -4$

   Como el producto de las pendientes es igual a -1, las rectas son perpendiculares.

8. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes para que la resuelvan: ***Determine el valor de x en la recta que pasa por (x, 5) y (-6, -1) si es perpendicular a la recta que pasa por (2, 3) y (-3, -7).***

   Contestación:

   Primero calcule la pendiente de la línea que pasa por (2, 3) y (-3, -7).

   $$m = \frac{3-(-7)}{2-(-3)} = \frac{10}{5} = 2$$

   El producto de las pendientes de las dos líneas es -1, por los tanto, la pendiente de la línea que pasa por (x, 5) y (-6, -1) es igual a $\frac{-1}{2}$. Ahora podemos plantear la siguiente

$$\frac{-1}{2}=\frac{5-(-1)}{x-(-6)}$$
$$\frac{-1}{2}=\frac{6}{x+6}$$
ecuación y resolverla: $-x-6=12$
$$-x=18$$
$$x=-18$$

9. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 3 (HT3) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 3: Soluciones)
10. El capacitador discute los resultados de la HT3 en grupo grande.

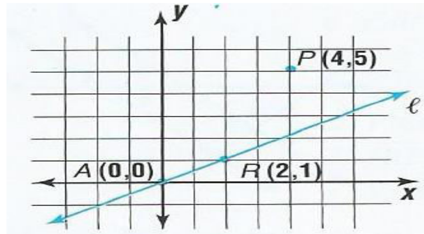
Actividad 4: Postulado de las paralelas

Proyecto sufragado por el Departamento de Educación mediante el programa: Título I Parte A

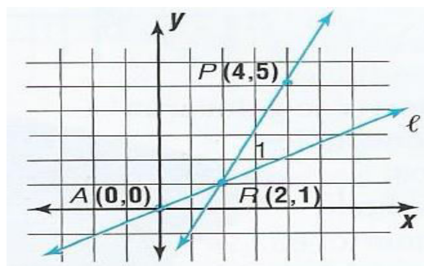
Modelación matemática

Podemos construir una recta paralela a otra recta dada, por un punto que esté fuera de ella. Sigue los siguientes pasos;

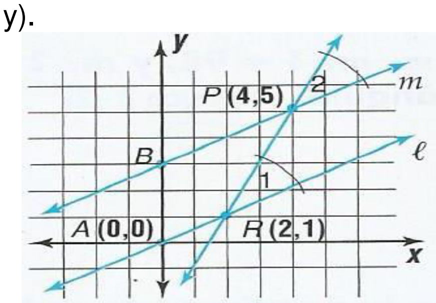
- Con la regla traza la recta ℓ que pasa por *A*(0, 0) y *R*(2, 1). Localiza el punto *P*(4, 5) fuera de la recta ℓ.



- Dibuja una recta pasando por *P* que interseque a la recta ℓ en el punto *R*. Nombra el $\angle 1$ como se muestra en la figura siguiente.



- Construye un ángulo congruente con $\angle 1$ utilizando *P* como vértice y $\overrightarrow{PR}$ como lado. Dibuja una recta por *P* para formar un ángulo congruente a $\angle 1$. Nombra *m* a esta recta, 2 al ángulo y *B* al punto de intersección en el eje vertical (eje y).



Ahora te toca

a. Identifica el nombre especial para el par de ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$.
b. Recuerda que el $\angle 2$ se construyó congruente al $\angle 1$. Elabora una conjetura acerca de las rectas ℓ y *m*.
c. Determina las coordenadas del punto *B*, donde la recta m cruza el eje vertical (eje y). Utiliza los puntos *P* y *B* para encontrar la pendiente de la recta *m*.
d. Utiliza los puntos *A* y *R* para encontrar la pendiente de ℓ.
e. ¿Validan tu conjetura acerca de la relación entre las rectas ℓ y *m* los resultados de las dos partes anteriores?

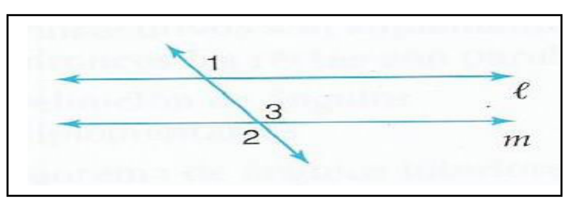
Obtenido del libro Burril, G., Cummins, J., Kanold, T., Malloy, C. y Yunker, L. (2004). Geometría: Integración, aplicaciones y conexiones. MaGraw-Hill, México.

1. La actividad de Modelación matemática ilustra un postulado que ayuda a probar que dos rectas son paralelas. Observa que este postulado es el recíproco otro discutido anteriormente.
2. El capacitador plantea el siguiente postulado: ***Si dos rectas en un plano son cortadas por una transversal, de tal forma que sus ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.*** Permite que los participantes lo discutan. La actividad de Modelación matemática establece al menos una recta paralela a ℓ pasando por *P*. En 1795, el físico y matemático escocés John Playfair planteó la versión moderna del ***postulado de las paralelas*** de Euclides, el cual establece que hay exactamente una recta paralela a la recta dada, pasando por un punto fuera de ésta.
3. El capacitador plantea el postulado de las paralelas: ***Si hay una recta y un punto fuera de ella, entonces existe exactamente una recta que pasa por el punto y es paralela a la recta dada.*** El postulado de las paralelas es el llamado quinto postulado de Euclides. Permite que los participantes lo discutan.
4. El capacitador plantea el siguiente teorema y anima a los participantes para que completen la demostración: ***Si dos rectas en un plano son cortadas por una transversal de tal forma que un par de ángulos alternos externos son congruentes, entonces las dos rectas son paralelas.***

   Demostración:

   Dado: $\angle 1 \cong \angle 2$

   Prueba: $\ell \text{ P} m$



Proposición	Razón
1. $\angle 1 \cong \angle 2$	Dado
2. $\angle 2 \cong \angle 3$	
2. $\angle 1 \cong \angle 3$	
3. $l \parallel m$	

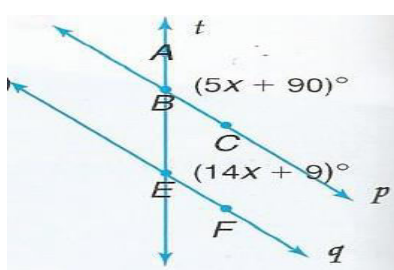
5. Hay otras formas de demostrar que dos rectas son paralelas, a continuación tres teoremas que la demostración de los mismos se harán en la Hoja de Trabajo 4:

   Teorema: ***Si dos rectas en un plano son cortadas por una transversal de tal forma que un par de sus ángulos interiores consecutivos son suplementarios, entonces las rectas son paralelas.***

   Teorema: ***Si dos rectas en un plano son cortadas por una transversal de tal forma que un par de sus ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.***

   Teorema: ***En un plano, si dos rectas son perpendiculares a una misma recta, entonces son paralelas.***

   El capacitador plantea el siguiente problema y anima a los participantes para que lo resuelvan (ver figura): ***Determina el valor de x y $m\angle ABC$ tal que $p \parallel q$.***



   Contestación:

   Explora De la figura, sabemos que $m\angle ABC$ = 5x + 90 y $m\angle BEF$ = 14x + 9.

Queremos determinar el valor de x y $m\angle ABC$ tal que $p \parallel q$.

Planifica Si dos rectas son cortadas por una transversal de tal forma que sus ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas. Así, si $m\angle ABC = m\angle BEF$, entonces $p \parallel q$.

Resuelve $m\angle ABC = m\angle BEF$

5x + 90 = 14x + 9

81 = 9x

9 = x

Examina Como $m\angle BEF$ = 14x + 9 y x = 9, $m\angle BEF$ = 14(9) + 9 = 135. Por lo tanto, $m\angle ABC = m\angle BEF$ y $p \parallel q$.

6. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 4 (HT4) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 4: Soluciones)
7. El capacitador discute los resultados de la HT4 en grupo grande.

Actividad 5: Geometría no euclidiana

Nota histórica

En su conocida obra ***Los Elementos***, Euclides seleccionó cinco postulados básicos para construir su geometría, que pueden enunciarse como sigue:

1. *Dos puntos determinan una única recta.*
2. *Todo segmento de recta puede prolongarse en cualquier dirección.*
3. *Es posible construir un círculo dado su centro y su radio.*
4. *Todos los ángulos rectos son iguales.*
5. *Dada una recta y un punto exterior a ella, hay una única recta que es paralela a la recta dada y que pasa por el punto.*

Durante 2000 años muchos matemáticos dedicaron su tiempo y sus esfuerzos a completar con nuevos teoremas esa gran construcción que es la geometría de Euclides. Algunos de ellos trataron de reducir el número inicial de postulados, pues se pensaba que el **5º postulado** podía demostrarse a partir de los otros cuatro. Es decir, querían convertir el 5º axioma en teorema, en cuyo caso bastaría aceptar los cuatro primeros axiomas y tomarlos como punto de partida para obtener finalmente la misma geometría.

Para convertir el 5º postulado en un teorema, era necesario obtener una demostración, y a ello se dedicaron sin éxito muchos matemáticos a lo largo de varios siglos. Fue a principios del siglo XIX cuando tres matemáticos, *Lobachevski* en Russia, *Gauss* en Alemania y *Bolyai* en Hungría, dieron con un resultado inesperado que arrojó una nueva luz sobre esta cuestión. Trabajaron independientemente unos de otros en la elaboración de modelos geométricos que mantenían los cuatro primeros postulados de Euclides a la vez que negaban el quinto. Esperaban que una geometría en la que se negara que **"por un punto exterior a una recta pasa una única paralela"**, sería una geometría incoherente y llena de contradicciones.

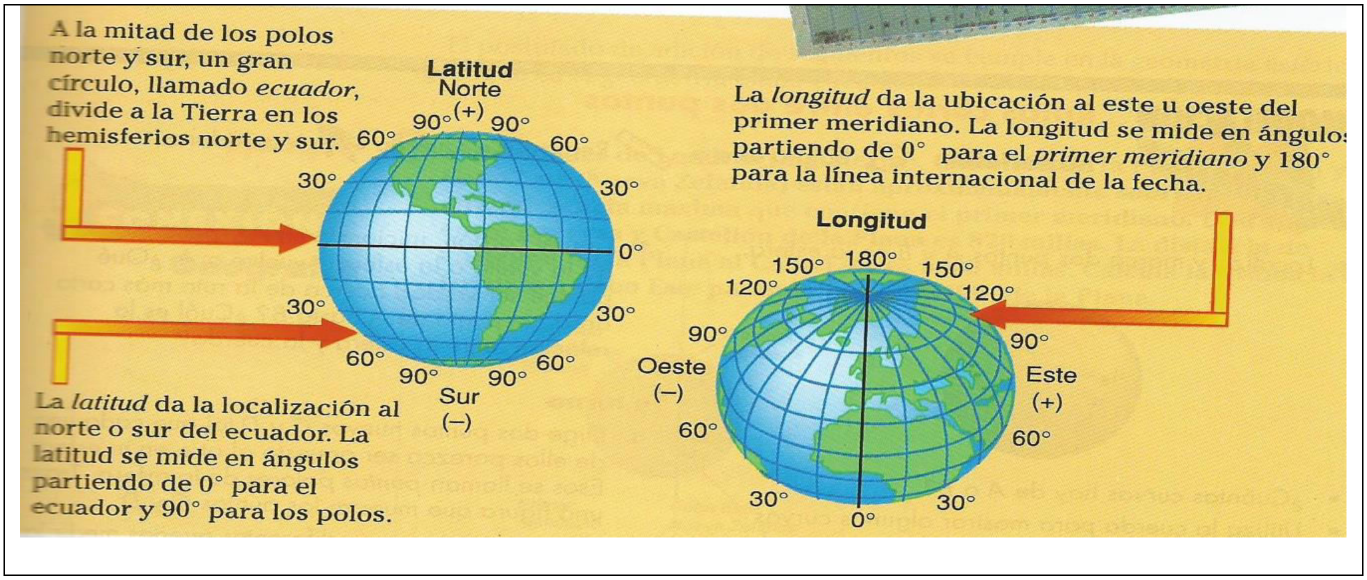
Estos tres grandes matemáticos utilizaron el siguiente método de razonamiento en su intento de probar que el axioma de las paralelas era consecuencia necesaria de los otros cuatro:

Si tenemos "P", y probamos que "P y no Q" es imposible, entonces de "P" se deduce necesariamente "Q".

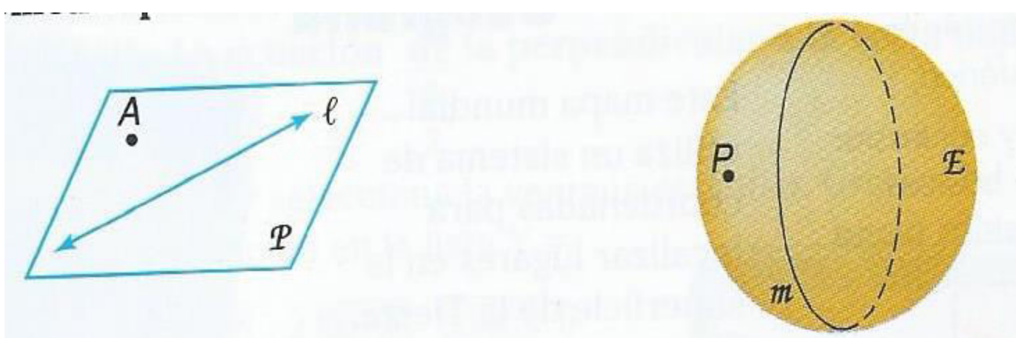
En el caso que nos ocupa, **"P"** es el conjunto de los cuatro primeros axiomas y **"Q"** es el 5º. Sin embargo, en contra de lo que esperaban, obtuvieron una geometría coherente, impecable desde el punto de vista lógico, válida aunque algunos de sus resultados fueran contrarios a la geometría clásica de Euclides. Probaron que **"P y no Q" es posible, por lo cual "Q" no se deduce de "P"**, es decir, demostraron que **EL 5º POSTULADO ES INDEPENDIENTE DE LOS OTROS 4**. Ese resultado tuvo un gran impacto, tanto por su interés matemático como filosófico, y dejó definitivamente resuelta la cuestión, aunque en un sentido distinto del esperado. Aparecieron de esta manera las geometrías ***no euclidianas***, donde son posibles otros espacios sorprendentes y maravillosos.

Hay dos formas de **negar** el 5º postulado de las paralelas:

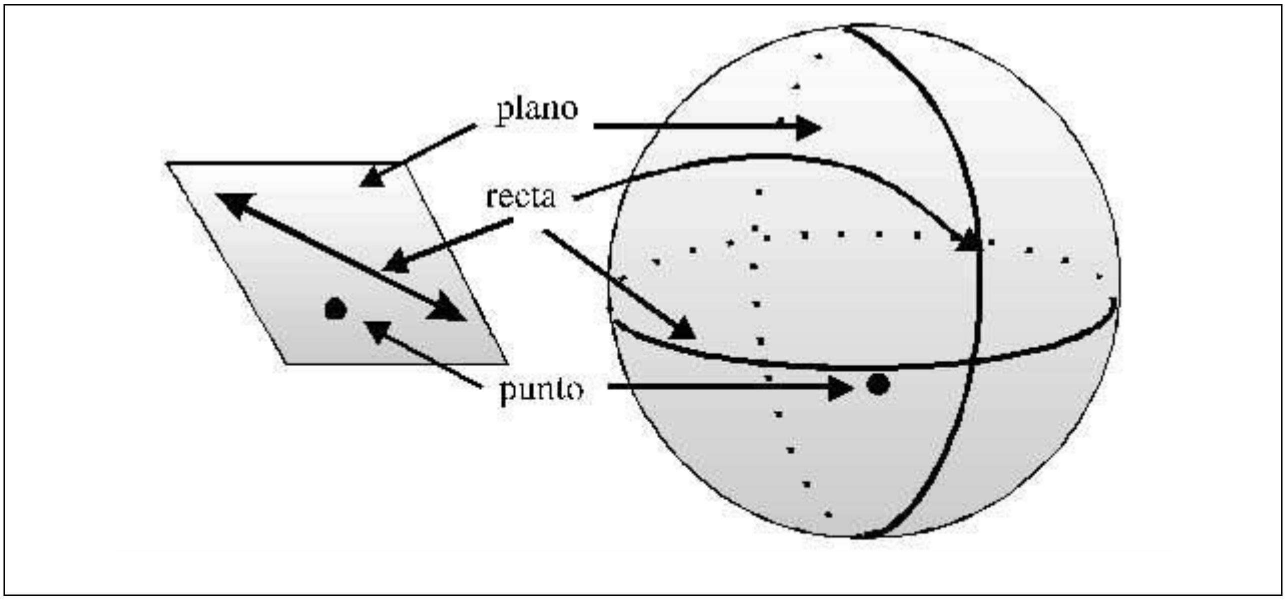
A. *Dada una recta y un punto exterior a ella, no existe ninguna recta paralela a la dada que contenga al punto*.
B. *Dada una recta y un punto exterior a ella, existen al menos dos rectas paralelas a la dada que contienen al punto.*



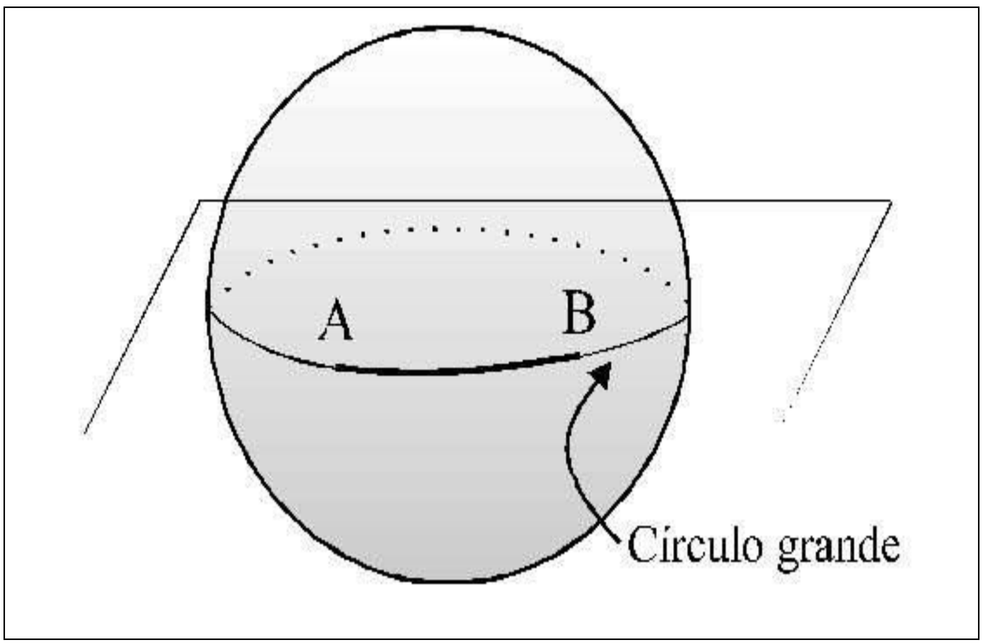
1. El capacitador utiliza la siguiente figura para discutir con los participantes que en el estudio de la ***geometría plana euclidiana***, consideramos un sistema de puntos, rectas y planos. En la ***geometría esférica*** (geometría no euclidiana) consideramos un sistema de puntos circunferencias (líneas) grandes y esferas (planos).



2. El capacitador concluye que en la geometría esférica los puntos son iguales que en la euclidiana, las rectas son *círculos grandes* que pasan por dos puntos llamados polos (también se llaman geodésicas).

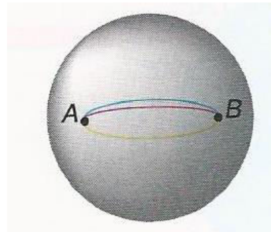


3. El capacitador explica que en la geometría esférica la distancia más corta entre dos puntos no es el segmento sino el *arco* de un círculo grande (ver figura).



4. El capacitador modela cómo conseguir la ruta más corta entre dos puntos en la geometría esférica, siguiendo los siguientes pasos:

i. Localiza y marca dos puntos A y B en la bola de baloncesto (ver figura).



ii. Pregunta: ¿cuántas curvas (arcos) hay entre A y B? Contestación: infinitas.

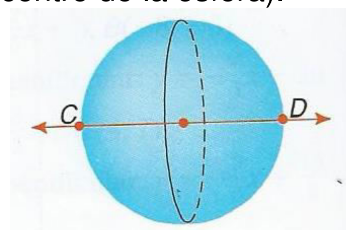
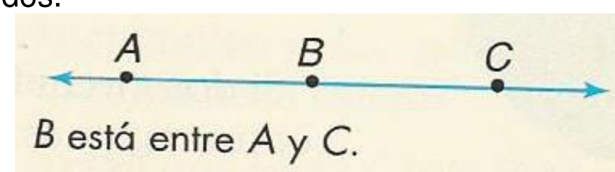
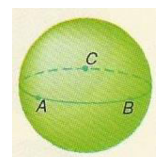
iii. Utiliza la cuerda para mostrar algunas curvas entre A y B. Mide la longitud de cada cuerda aproximando a los milímetros más cercanos. Pregunta: ¿cuál parece ser la ruta más corta? Contestación: La que forma la circunferencia más grande.

iv. Con el cordón, iniciando en A y pasando por B da la vuelta a la esfera y vuelve a A. ¿Qué parece ser cierto acerca de la ruta más corta desde el punto A hasta B? Contestación: La ruta más corta se obtiene con la circunferencia más grande. ¿Cuál es la relación entre la esfera y la cuerda? Contestación: El diámetro de la esfera es igual al diámetro de la cuerda.

Es importante que los participantes entiendan que en la geometría esférica dados dos puntos A y B la línea que pasa por A y B es el círculo grande que pasa por A y B.

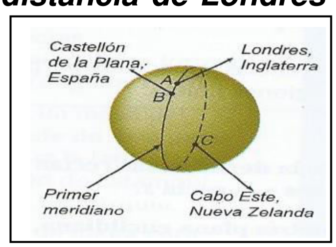
5. El capacitador compara y contrasta rectas en el sistema de geometría plana euclidiana y su homólogo (circunferencias grandes) en la geometría esférica (utilice la siguiente tabla).

Geometría plana euclidiana Rectas en el plano	Geometría esférica Circunferencias máximas (líneas) en la esfera
1. Un segmento de recta es la ruta más corta entre dos puntos.	1. Un arco de una circunferencia es la ruta más corta entredós puntos.

2. Existe sólo una recta que une dos puntos cualesquiera.	2. Existe sólo una circunferencia grande que pasa por dos puntos cualesquiera no polares (puntos polares son aquellos puntos en la esfera que la línea que los une pasa por el centro de la esfera). 
3. Una recta es infinita.	3. Una circunferencia grande es finita y retorna a su punto de partida.
4. Si tres puntos son colineales, hay exactamente uno de ellos entre los otros dos. 	4. Si tres puntos son colineales, cualquiera de los tres está entre los otros dos. A está entre B y C. B está entre A y C. C está entre A y B. 

6. El capacitador plantea la siguiente situación y anima a los participantes a resolverla:

Las ciudades de Londres (Inglaterra), Castellón de la Plana (España) y Cabo Este (Nueva Zelanda) están aproximadamente sobre la circunferencia máxima que contiene el primer meridiano (ver figura). La distancia entre Londres y Castellón de la Plana es 820 millas. La distancia de Castellón de la Plana al Cabo Este es 5300 millas. Calcula la distancia de Londres a Cabo Este pasando por Castellón de la Plana.



Contestación: Como las tres ciudades quedan en la misma circunferencia, podemos establecer que Castellón de la Plana (B) está entre Londres (A) y Cabo Este (C). Por el postulado de adición de segmentos,

$$AC = AB + BC$$
$$AC = 820 + 5300 = 6120$$

Por lo tanto, la distancia de Londres a Cabo Este pasando por Castello de la Plana es 6120 millas aproximadamente.

7. El capacitador reparte la Hoja de Trabajo 5 (HT5) y discute con los participantes las instrucciones. Mientras los grupos resuelven los problemas el capacitador contesta preguntas y se asegura que los grupos trabajen colaborativamente. (Las contestaciones se encuentran en el documento Hoja de Trabajo 5: Soluciones)
8. El capacitador discute los resultados de la HT5 en grupo grande.

III **Cierre**

1. Cada grupo retoma los papelotes desarrollados en el inicio para reflexionar acerca de los aprendizajes en la capacitación (*assessment* final). Se le permite a los participantes que hagan los cambios que sean pertinentes. Se discute con los participantes los cambios propuestos y la razón por qué los hicieron.

Bibliografía:

Burrill, G., Cummins, J., Kanold, T., Boyd, C., Malloy, C. y Yunker, L. (2004). *Geometría: Interpretación aplicación y conexiones.* McGraw Hill, México.

Departamento de Educación (2011). *Estándares de Contenido y Expectativas de Grado: Programa de Matemáticas.*

Miller, C., Heeren, V. y Hornsby, J. (2004). *Matemática: razonamiento y aplicaciones, decimal edición*. Pearson, México.

Moise, Edwin E. (1974). *Elementary geometry from an advanced standpoint, second edition*. Addison-Wesley, California.

Moise, Edwin E. (1966). *Geometría Moderna*. Addison-Wesley, California.