AlACiMa
Alianza para el Aprendizaje de Ciencias y Matemáticas
PR – Math and Science Partnership (PR-MSP)
Actividad Matemática – Nivel 7 al 12

Título: ¡Errores en el Razonamiento!

Nivel: 7-12

Autor: Dr. Francis N. Castro

Objetivo: Reconocer errores en conclusiones o procesos matemáticos y en el razonamiento lógico.

Objetivos específicos:

Durante la actividad, los estudiantes:

a. Construirán afirmaciones.
b. Construirán el opuesto de una afirmación.
c. Analizarán la veracidad de una afirmación y su opuesto.
d. Analizarán la relación entre la veracidad de una afirmación y su opuesto en el contexto matemático y no matemático.
e. Construirán conjeturas.
f. Encontrarán contraejemplos de conjeturas.
g. Analizarán y compararán gráficas con el propósito de llegar a conclusiones correctas o para refutar conclusiones.
h. Reconocerán conclusiones que no estén apoyadas en razones válidas.
i. Reconocerán una conclusión válida que se basa en afirmaciones ciertas.

Estándares:

De contenido:
Algebra

- El estudiante es capaz de comprender patrones, relaciones.
- El estudiante es capaz de resolver situaciones matemáticas utilizando símbolos matemáticos, investigar y realizar conjeturas matemáticas.

- El estudiante es capaz de usar modelos matemáticos para representar y entender relaciones cuantitativas.
- El estudiante es capaz de analizar cambios en contexto diferentes.

Geometría

- El estudiante es capaz de analizar las propiedades y características de formas geométricas de dos dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.
- El estudiante es capaz de utilizar criterios deductivos e inductivos en argumentos concernientes a ideas geométricas.

De proceso:

Razonamiento y prueba

- El estudiante es capaz de reconocer el razonamiento y prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas.
- El estudiante es capaz de investigar y realizar conjeturas matemáticas.
- El estudiante es capaz de desarrollar y evaluar argumentos y métodos de prueba.
- El estudiante es capaz de seleccionar y usar diferentes tipos de razonamiento.

Comunicación

- El estudiante es capaz de organizar, presentar e integrar ideas, utilizando el lenguaje matemático.
- El estudiante es capaz de comunicar pensamientos matemáticos de manera coherente.
- El estudiante es capaz de analizar y evaluar pensamientos matemáticos y las estrategias utilizadas por otros.
- El estudiante es capaz de justificar conjeturas, utilizando argumentos claros y precisos.

Tiempo sugerido: 2 periodos

Materiales y equipo:

- Guía del estudiante para cada alumno.
- Compass
- Calculadora gráfica TI – 83 Plus Silver Edition o TI – 84 Plus Silver Edition para cada estudiante
- Calculadora gráfica TI – 83 Plus Silver Edition o TI – 84 Plus Silver Edition de proyector o TI – presenter

- Proyector vertical o proyector digital (si se usa el TI – presenter)
- Una Regla para cada grupo
- Una libreta de papelotes para cada pareja

<u>Preparación</u>:

Puede colocar a los estudiantes en parejas aleatoriamente para trabajar los ejercicios incluidos en la actividad. Lo importante es que se fomente el hecho de que puedan explicar (justificar) su razonamiento. Cada pareja debe escribir la contestación a cada ejercicio en un papelote y presentarlo a la clase.

<u>Introducción</u>:

En esta actividad se pretende que los estudiantes pasen por el proceso de reconocer el error de razonamiento de que el opuesto de una afirmación cierta es cierta antes de presentarle la tabla de la verdad de la afirmación. Específicamente, en la parte de "**inicio**" se les presentan unas afirmaciones y se hacen varias preguntas sobre las afirmaciones. En particular, en los primeros ejercicios se provee una afirmación y se pide que encuentren su opuesto. Discutiremos la relación entre la validez de la afirmación y de su opuesto. Por último en esta parte desarrollamos la tabla de la verdad de una afirmación y su opuesto.

En la parte de "**desarrollo**", se proveen dos métodos distintos para solucionar una ecuación lineal y se le pide que analicen los dos métodos. También se le proveerá un argumento matemático con un error para que lo analicen y encuentren el error. Además, se le pedirá que conjeturen cuál va a ser la fórmula de suma de la los primeros *n* números naturales impares. Se proveerán conjeturas para que encuentren contraejemplos. Además, en la parte de "**cierre**" se le presentará una gráfica y dos posibles predicciones para que el estudiante decida cuál de las dos es la más correcta.

En la parte de **assessment**, se les solicita a los estudiantes que escriban el opuesto de varias proposiciones.

En la próxima parte se le provee un argumento con una conclusión para que se indique si la conclusión es válida. Si no es válida se tiene que proveer un contraejemplo.

Cada pareja debe escribir la contestación a cada ejercicio en un papelote y presentarlo a la clase.

Procedimiento:
Inicio:
El propósito de este primer ejercicio es explorar el conocimiento previo sobre proposiciones y reciproco.

Ejercicio 1: Se presentan las siguientes afirmaciones:

1. ¿Qué significa la siguiente afirmación: "*Si deseas algo bien hecho, hazlo tú mismo"?*
2. ¿A qué se refiere la siguiente afirmación: "*Si no estás reciclando lo estás tirando todo"*?
3. ¿Qué significa la siguiente afirmación: *¡Donas Recién Horneadas! Compra 2, y la otra es GRATIS*? Si asumimos
4. que la pasada afirmación es cierta, ¿es cierto su reciproco? ¿Por qué?
5. Ofrece un ejemplo de una afirmación falsa con un reciproco cierto.

Respuesta:

1. Un posible significado es que si uno desea que una actividad o tarea se haga bien hecha, uno tiene que hacerla.
2. La afirmación se refiere a que reciclar ayuda a preservar los recursos naturales de la Tierra.
3. La afirmación nos dice que al comprar dos donas recibiremos una gratis. No. El reciproco es "Si consigue otra gratis, entonces comprará dos de las mismas". El artículo gratuito está condicionado a la compra de los dos primeros.
4. Las repuestas varían. Si vivo en Puerto Rico, entonces vivo en San Sebastián. El opuesto: Si vivo en San Sebastián, entonces vivo en Puerto Rico. Si $x^2>0$, entonces $x>0$. El opuesto: Si $x>0$, entonces $x^2>0$.

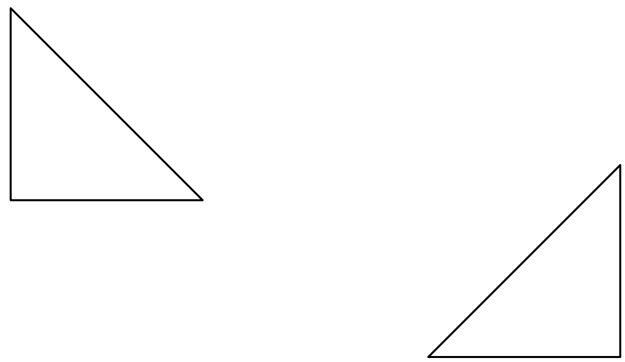
Antes de discutir el siguiente ejemplo, el capacitador debe explorar el entendimiento de la definición de proposición.

Ejercicio 2: Se presenta la siguiente proposición:

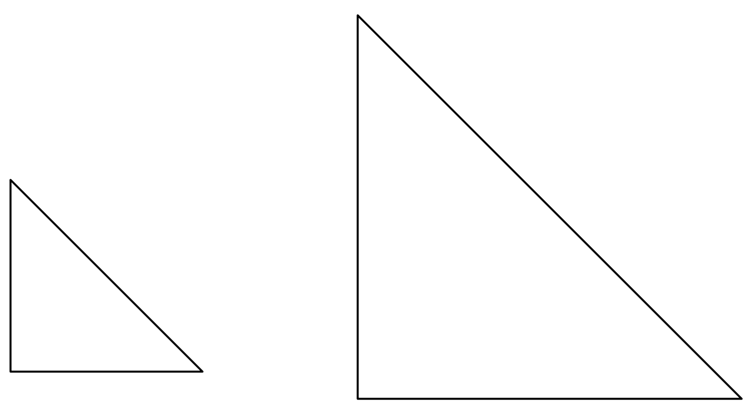
Si dos triángulos son congruentes, entonces los ángulos correspondientes son de igual medida.

a. ¿Cuál es la veracidad de la pasada proposición?
   Respuesta:
   Cierta, ya que en dos triángulos congruentes los lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen igual medida (definición de triángulos congruentes).

Por ejemplo los siguientes triángulos son congruentes.



b. Escribe el reciproco de la proposición de la parte a. ¿Cuál es la veracidad del reciproco? ¿Por qué?
   Respuesta:
   Si los ángulos correspondientes de dos triángulos tienen igual medida, entonces los triángulos son congruentes. Los siguientes dos triángulos proveen un contraejemplo para el opuesto de la afirmación. En estos dos triángulos tenemos que sus ángulos correspondientes tienen la misma medida y los mismos no son congruentes.



Ejercicio 3: Se presenta la siguiente proposición:

Un maestro les dice a sus estudiantes lo siguiente:
Si usted saca 90% o más en el examen final, entonces usted obtiene A en el curso.

a. Encontrar la veracidad de la proposición.
   Respuesta:
   Notar que la veracidad de la proposición va a depender de la veracidad de:
   1. Usted obtiene 90% o más en el examen final, 2) Usted obtiene A en el curso.

   Caso 1. Si es cierto que usted obtuvo 90% o más en el examen final y usted obtuvo A en el curso, entonces la proposición es cierta ya que se cumplió la promesa o garantía hecha por el maestro.

   Caso 2. Si es cierto que usted obtuvo 90% o más en el examen final y es falso que usted obtuvo A en el curso, entonces la proposición es falsa ya que no se cumplió la promesa o garantía hecha por el maestro.

   Caso 3. Si es falso que usted obtuvo 90% o más en el examen final y es cierto que usted obtuvo A en el curso, entonces la proposición es cierta ya que el maestro no afirmó nada acerca de si usted no obtenía 90 o más en el examen final.

   Caso 4. Si es falso que usted obtuvo 90% o más en el examen final y usted obtuvo A en el curso, entonces la proposición es cierta ya que el maestro no afirmó nada acerca de si usted no sacaba 90 o más en el examen final.

b. ¿Cómo le podríamos llamar al tipo de afirmación anterior?
   Respuesta:
   Una proposición como la pasada usualmente en las matemáticas se le llama proposición condicional. La forma es "Si <u>oración con una veracidad</u>, entonces <u>oración con una veracidad."</u> La primera oración con una validez se le llama hipótesis y a la segunda oración se le llama conclusión o consecuencia. Con este vocabulario el reciproco de una proposición condicional es intercambiar simbólicamente la hipótesis y la conclusión. Una manera de escribir una proposición condicional es $p \to q$, donde p, q son oraciones con una validez. El reciproco de una proposición condicional es $p \to q$ se escribiría simbólicamente $q \to p$.

Podríamos organizar la información anterior en una tabla donde p es la oración: "*Usted obtiene 90% o más en el examen final* " y *q* es la oración "*Usted obtiene A en el curso es la oración* ". La misma se muestra a continuación.

p: Usted obtiene 90% o más en el examen final.	**q: *Usted obtiene A en el curso.***	***$p \to q$***
Cierto	cierto	cierto
Cierto	falso	falso
Falso	cierta	cierto
Falso	falso	Cierto

La tabla que hicimos le llamamos la tabla de la verdad de la proposición.

c. ¿Cuál es el reciproco de la proposición anterior? ¿Cómo escribiríamos simbólicamente el reciproco de una proposición condicional?

Respuesta: Si usted obtiene A en la clase, entonces obtuvo 90% o más en el examen final.

Se escribiría simbólicamente $q \to p$.

d. Hacer la tabla de la verdad para la afirmación de parte c.

Respuesta: Podríamos organizar la información anterior en una tabla donde q es la oración: "*Usted obtiene A en el curso* " y *p* es la oración "*Usted obtiene 90% o más en el examen final* ".

p: Usted obtuvo 90% o más en el examen final.	q: *Usted obtuvo A en el curso.*	*$q \to p$*
Cierto	cierto	Cierto
Cierto	falso	Cierto
Falso	cierta	Falso
Falso	falso	Cierto

Ejercicio 4: Amalia y Cassandra usaron dos métodos diferentes para resolver la ecuación *2x - 4=3x -6.* Una estudiante llegó a una conclusión no-válida. ¿Cuál conclusión es incorrecta?, ¿Cuáles pasos te llevan a la conclusión no-válida?

Método de Amalia	Método de Cassandra
2x-4=3x-6	*2x-4=3x-6*
2x-4+6=3x-6+6	*2(x-2)=3(x-2)*
2x+2=3x	$\frac{2(x-2)}{x-2}=\frac{3(x-2)}{x-2}$
2x+2-2x=3x-2x	*2=3*
2=x	
Conclusión: La solución *x=2*	Conclusión: La ecuación no tiene solución.

Respuesta:
La conclusión de Cassandra es incorrecta. Cuando Cassandra dividió ambos lados de la ecuación por *x-2,* ella asumió que *x*-2 no era 0. Antes que ella pueda concluir que la ecuación no tiene solución, Cassandra necesita ver si la ecuación original tiene solución cuando *x-2=0.*

Ejercicio 5: Noel trata de convencer a su amigo de que 1=2. Él utiliza los pasos ilustrados abajo para mostrar su razonamiento. Explicar el error en su razonamiento.

Sean *a* y *b* dos números positivos. Suponemos que *a=b*.

Afirmación	Justificación
$a=b$	
$ab=b^2$	Multiplica ambos lados por *b.*
$ab-a^2= b^2-a^2$	Resta a^2 de ambos lados.
$a(b-a)=(b+a)(b-a)$	Factoriza cada lado.
$\frac{a(b-a)}{(b-a)}=\frac{(b+a)(b-a)}{(b-a)}$	Divide ambos lados por *(b-a).*
$a=(a+a)$	Debido a que *a=b*, sustituye *a* por *b*.
a=2ª	Suma de términos semejantes.
$\frac{a}{a}=\frac{2a}{a}$	Divide ambos lados por *a.*
$1=2$	

El error en el argumento es cuando Noel divide por *(b-a),* está dividiendo por cero ya que *a=b*.

Los siguientes dos ejercicios son para trabajar individualmente. El capacitador de recoger las contestaciones y corregirlas.

Ejercicio 6: Considerar las siguientes sumas:

1=1
1+3=4
1+3+5=9
1+3+5+7=16
1+3+5+7+9=25

a. Conjeturar cuál será el valor de la suma de los primeros.
    A. 50 números naturales impares.
    B. 100 números naturales impares.

    Respuesta

    $$1+3+5+\cdots+2(50)-1=50^2$$
    $$1+3+5+\cdots+2(100)-1=100^2$$

b. Conjeturar una fórmula para la suma de los primeros *n* números naturales impares.

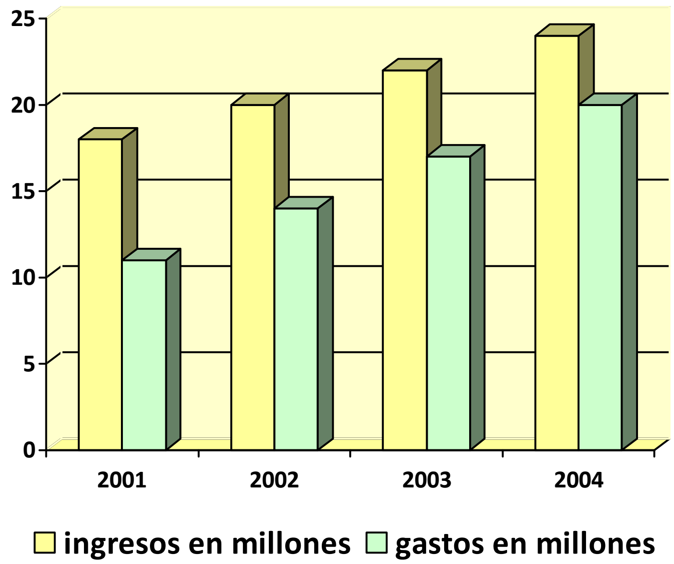
    Respuesta

    $$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$$

Ejercicio 6: ¿Es la expresión $n^2 - n + 11$ siempre un número primo, para todo número natural n?

Respuesta, No. Si $n = 11$, tenemos que 11^2 -11+11=121 y 121 no es un número primo.

Los datos de la gráfica se utilizan para predecir las futuras finanzas de los laboratorios SIN@NOMBRE. Nelson y Gabriel, hacen una predicción cada uno.



Predicción de Nelson	Predicción de Gabriel
El futuro de la compañía es muy bueno. La compañía hizo $6 millones más el 2004 que en el 2001. Sus ingresos continúan aumentando continuamente.	¡Ese negocio va camino a la bancarrota! Los gastos de la compañía están aumentando más rápidamente que sus ingresos. Para el 2012 la compañía estará gastando más de lo que gana.

Contestar las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál predicción crees es la más correcta? ¿Por qué?

   Respuesta. Nelson basó su predicción sólo en los datos sobre los ingresos. Gabriel basó la suya en la relación entre ingresos y gastos. Por lo tanto, la predicción correcta es la de Gabriel.

2. Las ganancias de una compañía son sus ingresos menos sus gastos. ¿En qué año tuvieron los laboratorios SIN@NOMBRE la mayor ganancia? ¿La menor?

   Respuesta. La mayor ganancia fue de 18-11=7 millones en el 2001. La menor ganancia fue de 24-20=4 millones en el 2004.

3. Basado en tus contestaciones de la parte 2, ¿cuál predicción de los estudiantes apoyas?

<u>Assessment Final:</u>

1.

A. Escribe el reciproco de las siguientes proposiciones.
   1. Si vives en Jayuya, entonces vives en el centro de la isla de Puerto Rico.
   2. Si $|n|>0$, entonces $n>0$ para toda n.
   3. Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.
   4. Si la suma de la medida de dos ángulos de un triángulo es 90˚, entonces el triángulo es rectángulo.

   Respuesta:
   1. Si vives en el centro de la isla de Puerto Rico, entonces vives en Jayuya.
   2. Si $n>0$ para toda n, entonces, $|n|>0$.
   3. Si un triángulo es isósceles, entonces dos de sus lados son congruentes.
   4. Si un triangulo es rectángulo, entonces la suma de la medida de dos de sus ángulos es 90˚.

B. Indica si las proposiciones de la parte A son Ciertas o Falsas. Si es Falsa, provee un contraejemplo.

   Respuesta:
   1. cierta.
   2. falsa.
   3. cierta.
   4. cierta.

C. Indica si el reciproco de las proposiciones de la parte A son Ciertas o Falsas. Si es Falsa, provee un contraejemplo.

   Respuesta:
   1. falsa.
   2. cierta.
   3. cierta.
   4. cierta.

D. Indica si cada conclusión es válida. Escribe Sí o No. Si no, provee un contraejemplo.

1. Si Eva contesta el teléfono, entonces ella está en casa. Eva está en su casa. Conclusión: *Ella contesta el teléfono.*
2. Todos los carros usan gasolina. Todas las motoras usan gasolina. Conclusión: *Todos los carros son motoras.*
3. Todos los mamíferos pueden volar. Los cerdos son mamíferos. Conclusión: *Los cerdos vuelan.*

Respuesta.

1. falsa.
2. falsa.
3. cierta.

Reto: *″ Juan tiene por lo menos 6 primos”, dice José.*
″ No, tienes menos de 6”, corrige Ramiro.
″ Tal vez tengas razón, pero lo que sé, es que tienes más de 1 primo”, agrega Ezequiel.

¿Cuántos primos pueden tener Juan si se sabe que uno solo de los muchachos dice la verdad?

Respuesta:
Un solo primo o ningún primo.

<u>Referencias:</u>

Departamento de Educación de Puerto Rico (2000). Programa de Matemáticas: Estándares. San Juan, PR: Autor.

Rubenstein, R. N., Craine, T. V., y Butts, T. R. (2002). Matemática integrada I. Evanston, ILL: McDougal Littell.

Rubenstein, R. N., Craine, T. V., y Butts, T. R. (2002). Matemática integrada II. Evanston, ILL: McDougal Littell.

L. Caceres, M. Delgado, S. Dziobiak, G. Hernández y A. Portnoy, Módulos para Estudiantes Talentosos, Serie Meta.