Título: ¡Tu dependes de mi y yo de ti!

Autor: Francis N. Castro

Nivel: 10-12

Objetivo: Entender el concepto de recursividad.

Objetivos específicos:

A través de la actividad los participantes:

- Evaluarán fórmulas recursivas.
- Encontrarán y expresarán fórmulas recursivas.
- Buscarán formas en la naturaleza que muestren el principio de recursividad.
- Construirán conjeturas sobre fórmulas recursivas.
- Encontrarán el *n*-enésimo término de una sucesión.
- Encontrarán la razón común en una sucesión geométrica.
- Calcularán la media geométrica de una sucesión geométrica.

Estándares:

De contenido:

Algebra

- El estudiante es capaz de comprender patrones, relaciones.
- El estudiante es capaz de resolver situaciones matemáticas utilizando símbolos matemáticos, investigar y realizar conjeturas matemáticas.

- El estudiante es capaz de usar modelos matemáticos para representar y entender relaciones cuantitativas.
- El estudiante es capaz de analizar cambios en contexto diferentes.

Geometría

- El estudiante es capaz de analizar las propiedades y características de formas geométricas de dos dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.
- El estudiante es capaz de utiliza criterios deductivos e inductivos en argumentos concernientes a ideas geométricas.

Numeración y Operación

- El estudiante es capaz de comprender, representar y relacionar los números.
- El estudiante es capaz de efectuar cálculos.

De proceso:

Solución de Problemas

- El estudiante es capaz de construir conocimientos matemáticos a través de la solución de problemas.
- El estudiante es capaz de resolver problemas que aparecen en matemáticas y en otros contextos.
- El estudiante es capaz de adaptar y aplicar estrategias adecuadas y variadas para resolver problemas.

Razonamiento y prueba

- El estudiante es capaz de reconocer el razonamiento y prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas.
- El estudiante es capaz de investigar y realizar conjeturas matemáticas.
- El estudiante es capaz de desarrollar y evaluar argumentos y métodos de prueba.
- El estudiante es capaz de seleccionar y usar diferentes tipos de razonamiento.

Comunicación

- El estudiante es capaz de organizar, presentar e integrar ideas, utilizando el lenguaje matemático

- El estudiante es capaz de comunicar pensamientos matemáticos de manera coherente.
- El estudiante es capaz de analizar y evaluar pensamientos matemáticos y las estrategias utilizadas por otros.
- Justifica conjeturas, utilizando argumentos claros y precisos.

Tiempo sugerido: 2 periodos

Materiales y equipo:

- Guía del estudiante para cada alumno.
- Calculadora gráfica TI – 83 Plus Silver Edition o TI – 84 Plus Silver Edition para cada estudiante
- Calculadora gráfica TI – 83 Plus Silver Edition o TI – 84 Plus Silver Edition de proyector o TI – presenter
- Proyector vertical o proyector digital (si se usa el TI – presenter)
- Una Regla para cada grupo
- Papel Cuadriculado
- Papelotes

Preparación:

Puede colocar a los estudiantes en parejas para trabajar los ejercicios incluidos en la actividad. Cada pareja debe tener una libreta de papelotes. Lo importante es que se fomente el hecho de que puedan explicar (justificar) su razonamiento.

Introducción:

En esta actividad se pretende que los estudiantes pasen por el proceso de construir fórmulas recursivas. Específicamente, en la parte de "**inicio**" se les presenta dos problemas con el propósito de construir sus respectivas fórmulas recursivas. En el próximo problema se le presenta un árbol que representa el árbol genealógico de una abeja de miel macho. Al estudiante le pide que encuentre la formula recursiva de la sucesión de Fibonacci y complete un nivel más del árbol genealógico.

En el cuarto ejercicio el estudiante tiene que hacer una partición a un triángulo y repetírsela a cada caso anterior. En el próximo ejercicio el estudiante va a comparar las longitudes de los lados de tres rectángulos y encontrar una relación entre los lados. En el último ejercicio el estudiante comparará las áreas de tres rectángulos para encontrar una fórmula recursiva que nos permita calcular el área de los próximos rectángulos.

En la parte de **assessment final**, se les solicita que redacte un problema que envuelva una situación que requiera el uso de una definición recursiva.

Cada pareja debe escribir la contestación a cada ejercicio en un papelote y presentarlo a la clase.

Procedimiento:

Inicio:

Antes de empezar el próximo ejercicio es importante que se explore el entendimiento de los siguientes conceptos: definición de sucesión, términos de una sucesión, *n*-ésimo término de una sucesión y la notación de una sucesión.

Ejercicio 1:

El sueldo básico de un maestro es $18,000 anuales. Suponiendo que al finalizar cada año se le aumenta 5% de su salario, completa la siguiente tabla.

Años	Salario-método-1	Salario-método-2
s_1=1 empezando	\$18,000	\$18,000
s_2=2 el segundo año	18,000+(.05)(18,000)=18,000(1.05)=\$18,900=(1.05)s_1	18,000(1.05)=\$18,900
s_3=3 tercer año	18,900+(.05)(18,9000)=18,900(1.05)=\$19,845= (1.05) s_2	18,000$(1.05)^2$=\$19,845
s_4=4 cuarto año	19,845+(.05)(19,845)=19,845(1.05)=\$20,837.25= (1.05) s_3	18,000$(1.05)^3$=\$20,837.25
s_5=5 quinto año	20,837.25+(.05)(20,837.25)=20,837.25(1.05)=\$21,879.11= (1.05)s_4	18,000$(1.05)^4$=\$21,879.11
⋮	⋮	⋮
s_n=5 n-esimo año	$s_n= (1.05)s_{n-1}$	$s_n=18{,}000(1.05)^{n-1}$

Es importante enfatizar en el uso de notación correcta y en los diferentes métodos de solucionar el problema. Cada pareja debe presentar su solución al problema anterior.

Ejercicio 2:

Un paciente recibe 50 mg de una medicina. Cada día el 20% de la cantidad de medicina presente en su cuerpo es eliminada.

1. Determinar cuanta medicina queda en su cuerpo
    a. después del tercer día.
    b. después del quinto día.
    c. después de la primera semana.

2. Determinar cuánto tiempo tardará el cuerpo en eliminar una décima o más de la cantidad original de medicina que tenía en el cuerpo.

3. ¿Es posible que el cuerpo elimine toda la medicina? Explique.

Respuesta:

1. **a**. 2.56 mg, **b.** 10.49 mg

Al finalizar el décimo día, le quedara 5.4 mg. Al finalizar el décimo día le quedara 4.29 mg.

Usando la fórmula: $a_n = 50(0.8)^{n-1}$, donde a_n es la cantidad de medicina que le queda en el cuerpo el *n*-ésimo día.

Podemos concluir que el paciente no puede eliminar toda la medicina ya que $50(0.8)^{n-1}$ no puede ser igual a cero.

Ejercicio 3:

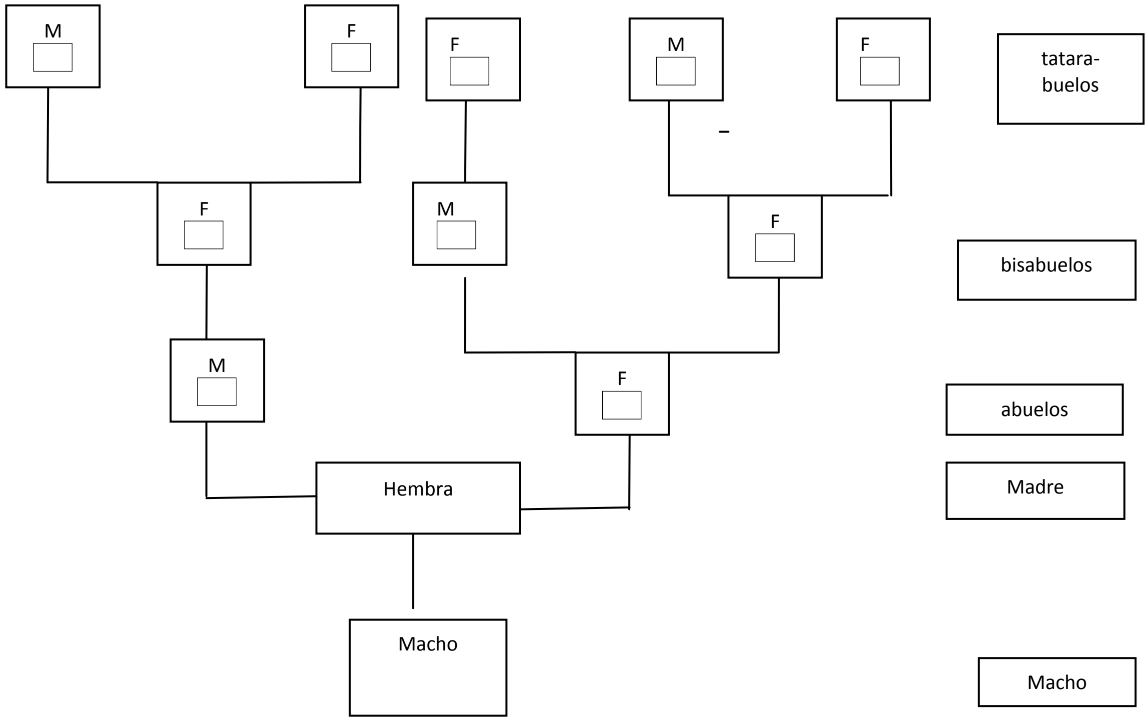
Las abejas macho salen de huevos no fecundados, por lo tanto solo tienen madre, pero no padre. Observando el árbol genealógico de la abeja macho abajo contestar las siguientes preguntas.

a. Comenzando con la abeja macho, escribir la sucesión del número de abejas en cada generación anterior. Esta sucesión es conocida como la sucesión de Fibonacci y ocurre en muchos aspectos de la naturaleza.
b. Escribir la fórmula recursiva para la sucesión de Fibonacci.
c. Completar un nivel más en el árbol genealógico.

Respuesta:

a. *1, 1, 2, 3, 5*

b. $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$

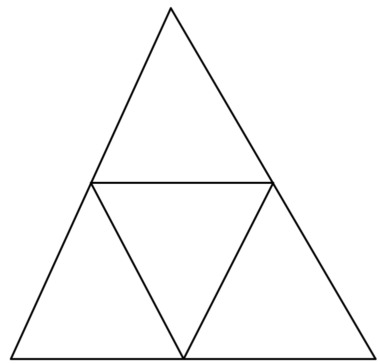


Curiosidad:

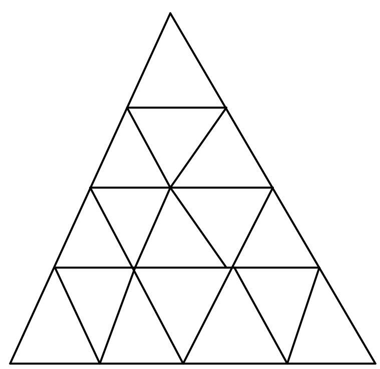
No se sabe si en la sucesión de Fibonacci existen un número infinito de números primos. También el año pasado se probó que en la sucesión de Fibonacci solo hay dos potencias perfectas enteras*: 1, 144.*

Ejercicio 3:

Considerar el siguiente triángulo. Si conectamos un segmento del punto medio de un lado del triángulo al punto medio de otro lado para cada lado del triángulo, ¿cuántos triángulos pequeños obtenemos?



b. Si repetimos el proceso una vez más a los triángulo pequeños de la parte **a**, ¿cuántos triángulos pequeñitos obtenemos? ¿Cuál es la razón entre los cantidad de triángulos en la parte **a** y esta parte?



c. Si aplicamos el mismo proceso a los triángulo pequeños del caso **b.** ¿cuántos triángulos pequeñitos obtendríamos? ¿Cuál es la razón entre los cantidad de triángulos en la parte **b** y esta parte? Usando lo anterior conjetura cual es la razón entre las cantidades de triángulos pequeños cuando repites el proceso siete y ocho veces.

d. ¿Cuál es el numero de triángulos pequeños en la *n*-ésima repetición con respecto al caso anterior?

Respuestas: a. 4

b. 16, $\frac{16}{4}$ = 4

c. 64, $\frac{64}{16}$ = 4, la razón entre dos términos consecutivos es 4.

d. $a_i = 4a_{i-1}$

Usando la parte **d** del ejercicio anterior, podemos desarrollar una fórmula que nos permita calcular el número de triángulos pequeños que obtenemos en cada posición. La sucesión que encontramos fue $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3=16$, $a_4=64$, pero la razón de términos consecutivos es 4. Así que

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1\\
&a_2 = 4a_1 = 4\\
&a_3 = 4a_2 = 4(4a_1) = 16\\
&a_4 =\\
&a_5 =\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots\\
&a_n =
\end{aligned}
$$

El estudiante completará los casos que faltan.

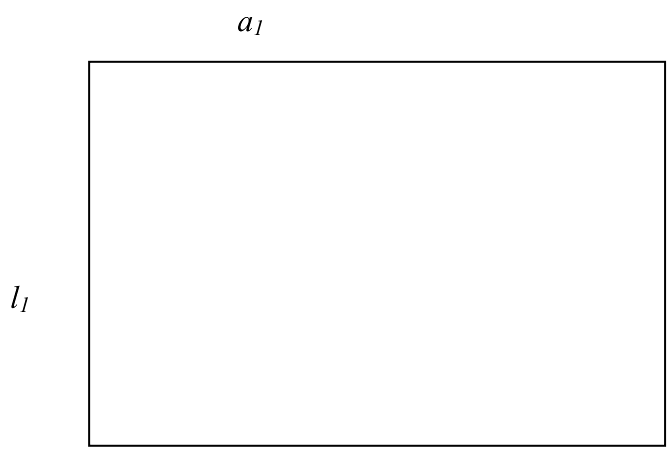
Respuesta:

$a_4 = 4a_3 = 4(4a_2) = 16a_2 = 16(4a_1) = 64$, $a_5 = 4a_4 = 256$

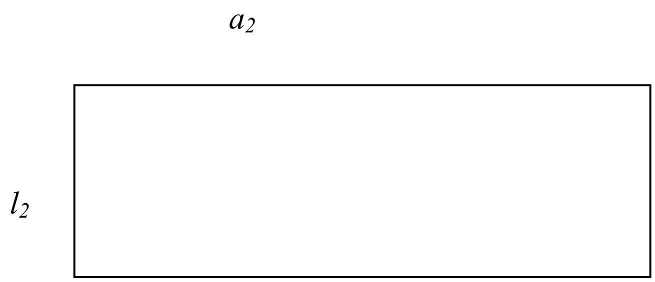
$a_n = 4^{n-1}$

Ejercicio 4:

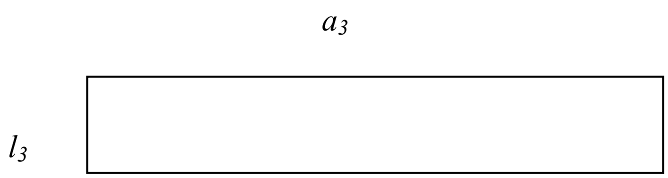
a. Se presentan los siguientes rectángulos. Medir la longitud de sus lados usando una regla. No estaría demás repasar o discutir algunas propiedades de los rectángulos.



Rectángulo 1



Rectángulo 2



Rectángulo 3

b. Sean a_1, l_1 las longitudes de los lados del rectángulo 1, a_2, ,l_2 las longitudes de los lados del rectángulo 2, y a_3, l_3 las longitudes de los lados del rectángulo 3.

1. Calcular la razón entre a_1 y a_2 , a_2 y a_3.
2. Calcular la razón entre l_1 y l_2 , l_2 y l_3.

c. ¿Qué relaciones puedes encontrar entre las longitudes de los lados de los rectángulos?

d. Usando el patrón encontrado en parte **b** y **c,** suponiendo que las razones encontradas en la parte **b** y **c** continúan, encontrar las dimensiones de los siguientes rectángulos y las razones entre dos rectángulos consecutivos.

Posición *i*	a_i	l_i	**Razón del ancho de dos rectángulos consecutivos**	**Razón del largo de dos rectángulos consecutivos**
i=3	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{l_3}{l_2}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$
i=4	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{l_4}{l_3}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$
i=5	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{l_5}{l_4}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$
i=6	3	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{l_6}{l_5}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	3	$\frac{1}{2^{n-2}}$	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{l_n}{l_{n-1}}=\frac{\frac{1}{2^{n-2}}}{\frac{1}{2^{n-3}}}=\frac{1}{2}$

e. Encontrar una fórmula para a_n y l_n en términos de a_{n-1} y l_{n-1}.

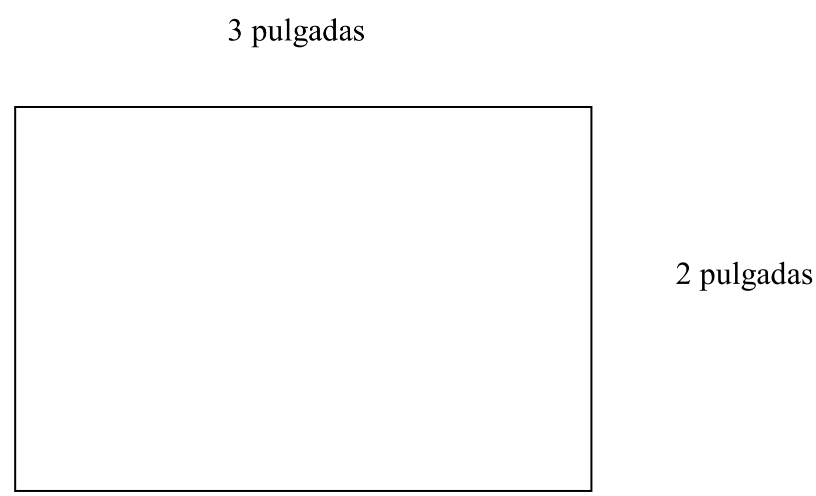
Respuesta: a) (2,3), b) (1,3) c) ($\frac{1}{2}$,3)

b. *1) 2, 2   2) 1, 1*

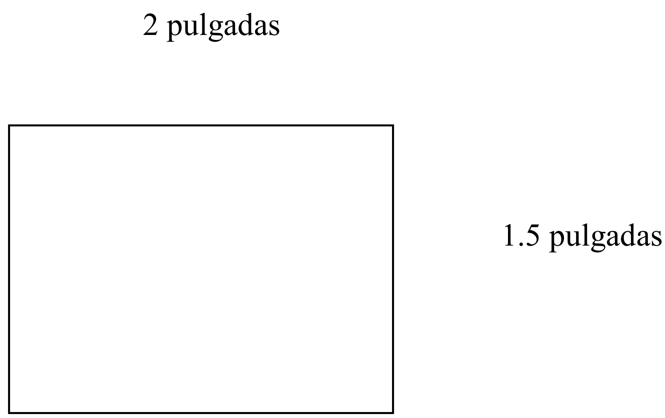
c. La razón de los a_i consecutivos es *1* y de los l_i es $\frac{1}{2}$ o *2.*

Ejercicio 5:

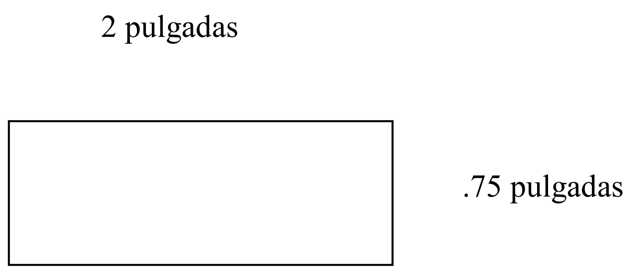
a. Se presentan los siguientes rectángulos. Calcular su área.



Rectángulo 1



Rectángulo 2



Rectángulo 3

b. Sean A_1, A_2, A_3 las áreas de los rectángulos 1, 2, y 3, respectivamente.

1. Calcular la diferencia entre A_1 y A_2 , A_2 y A_3.
2. Calcular la razón entre A_1 y A_2 , A_2 y A_3.

c. ¿Qué relaciones puedes encontrar entre las áreas de los rectángulos?

d. Usando lo encontrado en parte **b y** los rectángulos 1, 2 y 3, construir los próximos tres rectángulos con sus dimensiones correspondientes (esto es construir los próximos tres rectángulos que las longitudes de sus lados tengan la razón encontrada en **b**). Encontrar el área de los tres rectángulos construidos.

Posición *i*-ésima	área *i*-ésima
3	$A_3 = a_3 l_3 = 2(\frac{3}{4}) = \frac{3}{2}$ $= \frac{1}{2} A_2$ pulgadas cuadradas
4	$A_4 = \frac{1}{2} A_3 = \frac{3}{4}$ pulgadas cuadradas
5	$A_5 = \frac{1}{2} A_4 = \frac{3}{8}$ pulgadas cuadradas
6	$A_6 = \frac{1}{2} A_5 = \frac{3}{16}$ pulgadas cuadradas

e. Si continuáramos calculando las áreas de los próximos rectángulos, como podríamos expresar el área del rectángulo que está en la posición *n* en términos del área del que está en la posición *n*-1.

Respuesta: a. 6 pulgadas cuadradas, 3 pulgadas cuadradas, $\frac{3}{2}$ pulgadas cuadradas

b. 1) 3, $\frac{3}{2}$ **2)** $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$

c. La razón del área de dos rectángulos consecutivos es 2.

d. $\dfrac{A_3}{A_4} = 2 \Rightarrow \; A_4 = \dfrac{3}{4}$**,** $\; A_5 = \dfrac{3}{8}$**,** $\; A_6 = \dfrac{3}{16}$

e. $A_n = \dfrac{A_{n-1}}{2}$

Pregunta: ¿Cómo podríamos llamarle a las fórmulas encontradas en la parte **f** de los ejercicios 2 y 3?

Respuesta: Las fórmulas de la parte e del ejercicio 1 y 2 son llamadas fórmulas recursivas. Una fórmula recursiva para una sucesión nos define como calcular el *n-esimo* término haciendo uso de los términos anteriores.

Ejercicio 4: Dada la siguiente fórmula recursiva: $a_n=3a_{n-1}+4$ y $a_1=2$. Encontrar

a. $a_2=?$
b. $a_3=?$
c. $a_4=?$
d. $a_5=?$

Respuesta: *a. 10, b. 34, c. 106, d. 322*

Los siguientes dos ejercicios deben trabajarse individualmente. El capacitador debe recogerlos y corregirlos. Luego entregarlos y discutirlos en detalle.

Ejercicio 5:
Decida cuales de las siguientes expresiones son fórmulas recursivas. Explique su contestación.

a. $a_n=a_{n-1}+1,\; a_0 = 2$

b. $a_{n+1}= a_n+a_{n-1},\; a_0 = \dfrac{1}{2},\; a_1 = \dfrac{1}{3}$

c. $a_n=2n+1$

Respuesta: *a. Si es. B. Si es. C. No es.*

Si consideramos una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ con la propiedad de que la razón de dos términos consecutivos es constante.
Notar que las sucesiones de los ejercicios 1, 2 y 3 tienen esta propiedad.

Pregunta ¿Cómo podríamos representar algebraicamente esta relación?

Respuesta. Si r es la razón constante entre dos términos consecutivos, podemos escribir que

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$$

Si multiplicamos por a_i ambos lados, obtenemos la fórmula recursiva:

$$a_{i+1} = a_i r$$

¿Cuál era el valor de r en el ejercicio 1?

¿Cuál era el valor de r en el ejercicio 2?

¿Cuál era el valor de r en el ejercicio 3?

¿Cuál era el valor de r en el ejercicio 4?

¿Cuál era el valor de r en el ejercicio 5?

En las matemáticas encontramos que las proporciones son muy útiles para solucionar muchos problemas. Por ejemplo, nos podríamos preguntar que número real positivo satisface la siguiente proporción

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{5}.$$

En este caso la solución es $\sqrt{5}$.

¿Cuál es la razón de 1 y $\sqrt{5}$?

¿Cuál es la razón de $\sqrt{5}$ y 5?

¿Cómo comparan las dos razones anteriores?

Dado dos números reales positivos *a* y *b*, el número *x* que hace cierta la siguiente proporción

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

es llamada la media geométrica de *a* y *b.*

Ejercicio 6
Encontrar la media geométrica de

- **a.** .1 y .02.
- **b.** 3 y 27

Respuesta. ***a***. $\sqrt{.002}$ ***b***. *9*

Ejercicio 7
Encontrar la media geométrica para los números reales *a* y *b.*

Respuesta. $\sqrt{ab}$

Ejercicio 8 ¿Cuál es el promedio de dos números reales *a* y *b*?

Respuesta: $\frac{a+b}{2}$

Al promedio de dos números también le llamamos media aritmética.

Ejercicio 9

Representar la media aritmética en la línea real o recta real de los números reales positivos *a* y *b*.

Ejercicio 10
Encontrar la media aritmética de .1 y .02.

Respuesta: $\frac{.1+.02}{2}=\frac{.12}{2}=.06$

<u>Assessment Final:</u>

Redactar   un problema que envuelva una situación que requiera el uso de una definición recursiva.

<u>Referencias:</u>

Departamento de Educación de Puerto Rico (2000). Programa de Matemáticas: Estándares. San Juan, PR: Autor.

Rubenstein, R. N., Craine, T. V., y Butts, T. R. (2002). Matemática integrada I. Evanston, ILL: McDougal Littell.

Rubenstein, R. N., Craine, T. V., y Butts, T. R. (2002). Matemática integrada II. Evanston, ILL: McDougal Littell.

L. Cáceres, M. Delgado, S. Dziobiak, G. Hernández y A. Portnoy, Módulos para Estudiantes Talentosos, Serie Meta.