

Título: El Ajuste Perfecto

Nivel: 7-9

Autor: Prof. Caroline Rodríguez

Objetivo: En esta actividad los estudiantes explorarán situaciones que se pueden describir mediante un modelo lineal exacto. Los estudiantes describirán situaciones utilizando una tabla de valores, una ecuación y una gráfica.

Objetivos específicos:

Al finalizar la actividad los estudiantes podrán:

1. Identificar el conjunto numérico al cual pertenecen los valores posibles de la variable independiente de un modelo lineal.
2. Distinguir entre un modelo lineal discreto y un modelo lineal continuo.
3. Interpretar el significado real de la pendiente y los interceptos de una ecuación lineal.
4. Construir la tabla de valores, la ecuación y la gráfica que describen una situación real específica.
5. Dado una situación inicial específica, describir el efecto que tiene sobre la gráfica de la situación original si se cambia la pendiente y/o los interceptos.
6. Dado un grupo de gráficas lineales, elegir la que mejor describir una situación específica.

Estándares:

De contenido:

Álgebra

- Comprender patrones, relaciones y funciones
 - Representar y analizar patrones con tablas, gráficas, palabras y símbolos algebraicos
 - Relacionar y comparar las distintas formas de representar una relación

De Proceso:

Representaciones

- Producir representaciones visuales y numéricas para presentar estrategias para resolver problemas
- Representar y analizar problemas por medio de tablas, gráficas y ecuaciones

Solución de problemas

- Construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la solución de problemas
 - Analizar y resolver situaciones pertinentes donde construye y desarrolla conocimientos, destrezas y lenguaje matemático.

Razonamiento y Prueba

- Razonar y probar conclusiones coherentes y lógicas, tanto oral como escrita, utilizando tablas y/o párrafos.

Comunicación

- Organizar, presentar y explicar sus procedimientos, usando argumentos matemáticos en forma oral y escrita

Tiempo sugerido: 2.5 horas

Materiales y equipo:

- Lista de precios de efectos de lavado de autos de tiendas como *Pep Boys*, *Western Auto*, *Pitusa*, *KMart*, *Walmart*, etc. (para la parte I)
- Hoja de trabajo para los estudiantes y guía del maestro
- Calculadora gráfica (opcional)
- Papel cuadriculado
- Hoja con varios rectángulos de largo 10 cm. (para la parte II)
- Proyector vertical
- Proyector de computadora

Preparación:

Parte I: Recaudando fondos

Previo a realizar esta actividad con los estudiantes, el maestro debe obtener los precios corrientes de artículos de lavado de autos. Podría obtener hojas de especiales de varias tiendas o simplemente asignar a estudiantes que visiten varias tiendas para obtener precios para los siguientes materiales: esponjas o paños para lavar, baldes, jabón, paños para secar. La actividad asume que los estudiantes realizan el “car wash” en un lugar donde no tendrán que pagar por el servicio del agua. Los estudiantes pueden realizar la actividad en grupos de 3.

Parte II: Rectángulos y perímetros

Los estudiantes pueden realizar la actividad en grupos de 3.

Introducción:

En esta actividad los estudiantes explorarán situaciones que se pueden describir mediante un modelo lineal exacto. Se espera que los estudiantes hayan tenido experiencias previas en el salón de clases con los conceptos de pendiente e intercepto, y que sean capaces de generar la ecuación lineal correspondiente a un conjunto de pares ordenados.

La actividad se divide en dos partes. En la primera parte, los estudiantes describen las ganancias obtenidas al recaudar fondos mediante un “car wash”. El número de carros lavados es la *variable independiente* y la ganancia neta es la *variable dependiente*. El modelo lineal asociado a este evento es un modelo discreto ya que no se cobra por lavar medio carro.

En la segunda parte, los estudiantes investigarán la relación entre el ancho de un rectángulo con largo igual a 10 cm y el perímetro del rectángulo. Si el largo del rectángulo se mantiene constante, el perímetro es una función lineal del ancho. El ancho del rectángulo es la *variable independiente* y el perímetro del rectángulo es la *variable dependiente*. El modelo es continuo ya que el ancho de un rectángulo puede ser fraccionario.

Procedimiento:

Parte I: Recaudando Fondos

Inicio:

El maestro dividirá los estudiantes en grupos de 3. Distribuirá las copias de la hoja de trabajo la actividad. Se sugiere que cada grupo trabaje la actividad con una lista de precios de una tienda diferente. En esta parte inicial los estudiantes estimarán el costo de los materiales para realizar su actividad de recaudación y determinarán el precio que cobrarán por cada carro que se lave. Esto permitirá que en el grupo completo se obtengan gráficas lineales pero con interceptos y pendientes diferentes.

Desarrollo:

Distribuya las copias de la hoja de la actividad, e instruya a los estudiantes a completar las tareas para el siguiente problema:

El Club de Matemáticas de la escuela necesita recaudar fondos para un viaje a Washington D.C. y para su baile del Día de San Valentín. Los 11 miembros del club han decidido hacer un “Car Wash” para recaudar fondos para estos proyectos. La secretaria del club les provee una lista de precios de materiales.

Como miembro del Club, tu trabajo es producir un análisis matemático de esta situación que incluya hacer una tabla y una gráfica para contestar las preguntas que se encuentran en la Hoja de Trabajo.

1. ¿Cuánto es el gasto en materiales estimado para realizar un “Car Wash” exitoso , según discutido en tu grupo ? Elige una inversión en materiales que les permita abastecerse de materiales.

La respuesta a esta pregunta dependerá de los datos iniciales que tenga cada grupo. Lo importante es que cada grupo estime una inversión en materiales de tal forma que le sobren materiales al final y no que le falten.

2. ¿Cuál es el precio sugerido por tu grupo por cada carro que se lava?

La respuesta puede variar por grupo. Se le debe pedir que justifiquen su respuesta.

3. ¿Qué ocurre con las finanzas del Club si no se lava ningún carro?

Deben señalar que de no lavarse ningún auto, el Club tendría pérdidas, debido a los gastos de materiales. Este valor representará el intercepto en y de la recta.

¿Cómo se afectan las finanzas del club por cada carro lavado?

Se espera que reconozcan que por cada carro lavado, hay un ingreso y cuando este ingreso sea mayor que la inversión en materiales, entonces se estarán generando ganancias.

Describe verbalmente la relación que hay entre las siguientes cantidades para este problema: ganancia estimada, gastos iniciales estimados, precio por lavar cada carro, cantidad de carros lavados. Indica cual de las cantidades mencionadas son variables y cuales son constantes. Asigna letras para representar las cantidades que son variables.

Ganancia estimada será igual al precio por lavar cada carro multiplicado por el número de carros lavados menos los gastos iniciales estimados.

Ganancia estimada= y (variable dependiente)

precio por lavar cada carro = c (constante)

número de carros lavados = x (variable independiente)

gastos iniciales estimados = d (constante)

NOTA: c y d varían según el grupo

Escribe una regla general en forma de ecuación, que sirva para determinar la **ganancia estimada** que se obtiene al lavar cierto número de carros,

$$y = cx - d$$

4. Respuestas varían de acuerdo a gasto iniciales y precio por auto que elige el grupo.
5. Respuestas varían de acuerdo a gasto iniciales y precio por auto que elige el grupo.
6. Los puntos de la gráfica que has construido deben estar en una línea diagonal, sin embargo la recta que une todos los puntos NO es la gráfica de esta situación. Explique porqué.
Esta es una situación discreta, es decir, no podemos calcular ganancia estimada para un número fraccionario de carros. Como una recta representa todas las soluciones para una situación continua, en realidad, la gráfica para esta situación particular sería un subconjunto de todas las soluciones de la ecuación $y = cx - d$.
7. Si se unieran los puntos mediante una recta, ¿qué sentido real tendría el intercepto en y de la recta? ... ¿la pendiente?
Intercepto: gastos iniciales estimadas
Pendiente: costo por lavar cada carro.
8. ¿Qué diferencia se podrá observar entre la recta que obtiene tu grupo, y la recta que obtiene otro grupo si
 - a. compran los materiales en otra tienda? El intercepto podría ser mayor o menor, dependiendo de los costos iniciales estimados.
 - b. cobran un precio diferente por cada carro lavado? La gráfica tendrá una inclinación mayor o menor dependiendo del precio por cada lavado de carro.

9. Muestre los cálculos para determinar el número mínimo de carros que deben lavar los miembros del grupo para que la ganancia estimada sea mayor que cero?

La respuesta varía por grupo. Cada grupo debe igualar su ecuación a los gastos iniciales y despejar para x . Si el valor de x no es entero deben tomar el cielo de x , como la respuesta a la pregunta.

10. ¿Cuántos carros deben lavar los miembros del club para recaudar suficientes fondos para ...

- el viaje a Washington, DC – costo estimado \$2500?
- el baile de San Valentín – costo estimado, \$1350?

El procedimiento envuelve igualar su ecuación a cada valor y despejar para x .

11. Siendo realista, ¿pueden recaudar suficientes fondos para cubrir los gastos de las dos actividades planificadas con una esta única actividad de recaudar fondos? Explica.

Respuestas varían. Un ejemplo que muestra buena comprensión de la situación es:

“Me parece que es realmente imposible hacer dinero suficiente para el baile de San Valentín y para el viaje a Washington sólo con un “Car Wash”. Si suponemos que hay un gasto inicial de \$100, que cobraremos \$10 por lavar cada carro y que podemos formar tres grupos que lavarán un carro en 15 minutos. Entonces se necesitarían lavar 240 carros para tener \$2500, cuando los tres grupos lavarían cerca de 95 carros en el día de 8:00 AM – 4:00PM. Son demasiados carros para un día. Por otro lado, para la fiesta de San Valentín, necesitaríamos lavar 125 carros, y esto ya es más razonable. Tal vez sería buena idea encontrar otras formas de recaudar dinero aparte del lavado de autos.”

Cierre:

El maestro debe discutir con el grupo entero, las respuestas a las preguntas de la hoja de trabajo, enfatizando las justificaciones y el proceso de razonamiento de los estudiantes. También es importante aclarar cualquier suposición en la cual se han basado para sus respuestas.

HOJA DE TRABAJO 1
RECAUDANDO FONDOS

- El *Club* de Matemáticas de la escuela necesita recaudar fondos para un viaje a Washington D.C. y para su baile del Día de San Valentín. Los miembros del club proponen llevar a cabo un “Car Wash” para recolectar dinero para estos proyectos. Antes de aprobar la actividad, el director de la escuela les ha pedido una tabla y una gráfica que describan la relación entre la ganancia neta de la actividad y la cantidad de carros lavados. El tesorero les provee una lista de precios de los materiales que se necesitan. Como miembro del *Club*, tu trabajo es hacer el análisis matemático necesario para entregar el informe al director. Debes contestar las siguientes preguntas para guiar tu análisis.

1. ¿Cuánto es el gasto en materiales estimado para realizar un “Car Wash” exitoso, según discutido en tu grupo ? Elige una inversión en materiales que les permita abastecerse de materiales. Justifica tu respuesta.

2. ¿Cuál es el precio sugerido por tu grupo por cada carro que se lava? Justifica tu respuesta.

3.
a. ¿Qué ocurre con las finanzas del Club si no se lava ningún carro?

- b. ¿Cómo se afectan las finanzas del club por cada carro lavado?
- c. Describe verbalmente la relación que hay entre las siguientes cantidades para este problema: ganancia estimada, gastos iniciales estimados, precio por lavar cada carro, cantidad de carros lavados. Indica cual de las cantidades mencionadas son variables y cuales son constantes. Asigna letras para representar las cantidades que son variables.
- d. Escribe una regla general en forma de ecuación, que sirva para determinar la **ganancia estimada** que se obtiene al lavar cierto número de carros,

4. Llena la siguiente tabla utilizando los datos provistos en la preguntas anterior:

Tabla 1

Ganancia estimada obtenida por el *Club* por carros lavados

Número de carros	Ganancia Estimada
0	
1	
2	
5	
10	
20	
50	
100	
200	

5. Utilice papel cuadrulado y la información de la tabla de la pregunta 4, para construir una gráfica para esta situación.
6. Los puntos de la gráfica que has construido deben estar en una línea diagonal, sin embargo la recta que une todos los puntos NO es la gráfica de esta situación. Explique porqué.
7. Si se unieran los puntos mediante una recta, ¿qué sentido real tendría el intercepto en y de la recta? ... ¿la pendiente?

8. ¿Qué diferencia se podrá observar entre la recta que obtiene tu grupo, y la recta que obtiene otro grupo si
- a) compran los materiales en otra tienda?

 - b) cobran un precio diferente por cada carro lavado?
9. Muestre los cálculos para determinar el número mínimo de carros que deben lavar los miembros del grupo para que la ganancia estimada sea mayor que cero?
10. ¿Cuántos carros deben lavar los miembros del club para recaudar suficientes fondos para ...
- el viaje a Washington, DC – costo estimado \$2500?

 - el baile de San Valentín – costo estimado, \$1350?
11. Siendo realista, ¿pueden recaudar suficientes fondos para cubrir los gastos de las dos actividades planificadas con una esta única actividad de recaudar fondos? Explica.

Parte I: Rectángulos y Perímetros

Inicio:

El maestro dividirá los estudiantes en grupos de 3. Distribuirá las copias de la hoja de trabajo la actividad. Este es un modelo lineal continuo. El maestro debe leer las instrucciones de la hoja de trabajo con los estudiantes.

Los estudiantes, en grupos de 3, tomarán las medidas del ancho de 6 rectángulos con largo igual a 10 cm y determinarán el perímetro. La hoja de rectángulos provee una colección de rectángulos cuyos anchos varían desde 2 cm hasta 12 cm. En cada grupo se medirá el ancho de cada rectángulo y se determinará el perímetro del rectángulo. Esto último puede ser por medición o por fórmula. Luego los estudiantes pasarán los datos recogidos y calculados a la tabla de la hoja de trabajo y construirán la gráfica usando como variable independiente el ancho del rectángulo y como variable dependiente el perímetro del rectángulo. El ancho de cada rectángulo aumenta por 2 cm en cada ejemplo.

Desarrollo:

Los estudiantes completaran las tareas de la Hoja de Trabajo.

Análisis matemático:

El perímetro de un rectángulo está dado por la fórmula:

Perímetro = $2 \cdot \text{largo} + 2 \cdot \text{ancho}$. Al mantener el largo constante (10 cm), la ecuación cambia a $P = 20 + 2w$. Si han medido con cuidado los anchos de los rectángulos, la gráfica debe mostrar una tendencia lineal exacta. La pendiente representa el número de centímetros que aumenta el perímetro por cada aumento en 1 centímetro del ancho. El intercepto en y representa el perímetro cuando el ancho es 0. Note que este punto no representa una medida física real, ya que no se puede tener un rectángulo si el ancho es 0.

Cierre:

El/La maestro(a) discutirá con el grupo la Hoja de Trabajo. Para la discusión del grupo, el/la maestro(a) puede solicitar de estudiantes de diferentes grupos el perímetro correspondiente a los diferentes anchos. Luego puede construir la gráfica manualmente, utilizando la calculadora gráfica, y/o utilizando un programa de computadoras (ej. Excel). Finalmente, debe discutir las respuestas de diferentes grupos a las preguntas finales de la hoja de trabajo.

A. Describe el procedimiento que vas a realizar para obtener los datos que se incluirán en este trabajo. Tomamos las medidas del ancho de 6 rectángulos con largo igual a 10 cm. Luego determinamos el perímetro. Los rectángulos variaban en ancho desde 2 cm hasta 12 cm. Medimos el ancho de cada rectángulo y sumamos el largo de todos los lados para determinar el perímetro de cada rectángulo.

B. Datos recogidos

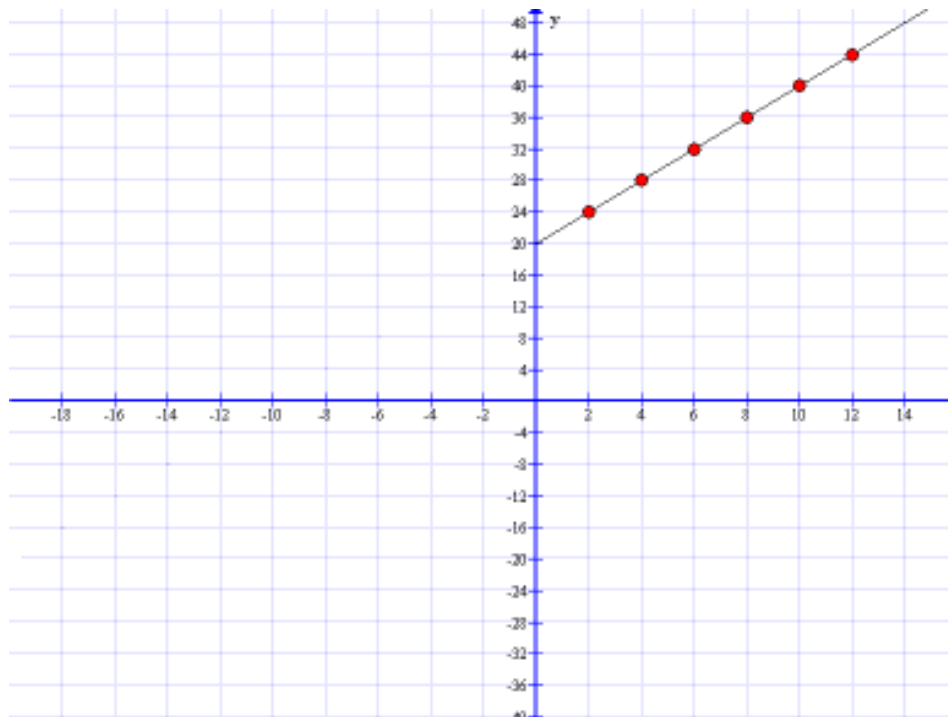
Tabla 1
Recolección de Datos

Rectángulo #	Largo	Ancho	Perímetro
1	10 cm	2	24
2	10 cm	4	28
3	10 cm	6	32
4	10 cm	8	36
5	10 cm	10	40
6	10 cm	12	44

Tabla 2
Pares Ordenados para Graficar

X (variable independiente: _Ancho_)	y (variable dependiente: _Perímetro_)
2	24
4	28
6	32
8	36
10	40
12	44

C. Construir una gráfica usando los puntos de la tabla #2.



D. Análisis matemático:

Escribe la fórmula general para el perímetro de un rectángulo usando P para representar el perímetro, w para representar el ancho y l para representar el largo.

$$P = 2 \text{ ancho} + 2 \text{ largo}$$

Ajusta la fórmula anterior para formar la ecuación que describe el experimento que realizaste. Recuerda que en los 5 casos el largo del rectángulo era constante, 10 cm.

$$Y = 2x + 20$$

E. Utiliza la ecuación de la parte D, para contestar las siguientes preguntas. Muestre todo tu trabajo.

1. Si el ancho es 16 cm, ¿cuánto es el perímetro?

$$Y = 2(16) + 20 = 32 + 20 = 42 \text{ cm}$$

2. ¿Cuán ancho es un rectángulo con largo igual a 10 y perímetro igual a 60 cm.

$$60 = 2x + 20$$

$$60 - 20 = 2x$$

$$40 = 2x$$

$$20 = x$$

3. ¿Qué interpretación física se puede dar al intercepto en y de tu gráfica para este problema? ¿Representa el intercepto en y un par de valores realmente posibles para el problema?

El intercepto en y representa el perímetro cuando el ancho es 0. Note que este punto no representa una medida física real, ya que no se puede tener un rectángulo si el ancho es 0.

4. ¿Cómo cambiaría tu gráfica si el largo del rectángulo fuera 15 cm.?

El intercepto en y sería 30. La gráfica tendría la misma inclinación pero “subiría” en el plano.

5. ¿Cómo cambia el perímetro con cada aumento de 2 centímetros en el ancho? ¿Cómo cambia el perímetro con cada aumento de 1 centímetro en el ancho?

El perímetro aumenta por 4 cm por cada aumento de 2 centímetros en el ancho. Equivalentemente, el perímetro aumenta por 2 cm por cada centímetro de aumento en el ancho.

6. ¿Cuál es la pendiente de tu ecuación?

La pendiente de la ecuación es 2.

¿Qué sentido físico tiene la pendiente de tu ecuación para esta situación?

La pendiente representa el número de centímetros que aumenta el perímetro por cada aumento en 1 centímetro del ancho.

¿Es posible describir la relación entre el perímetro y el ancho de un rectángulo con largo igual a 10 cm con una ecuación lineal que tenga una pendiente diferente de 2? Justifica tu respuesta. No, no es posible. El dos sale de que hay dos lados con el mismo ancho. Un rectángulo siempre tiene 4 lados.

HOJA DE TRABAJO #2
PERÍMETRO Y RECTÁNGULOS

<p>Experimento 1 Perímetro de Rectángulos</p>

Nombre: _____

Nombre: _____

Nombre: _____

A. Describe el procedimiento que vas a realizar para obtener los datos que se incluirán en este trabajo.

B. Datos recogidos

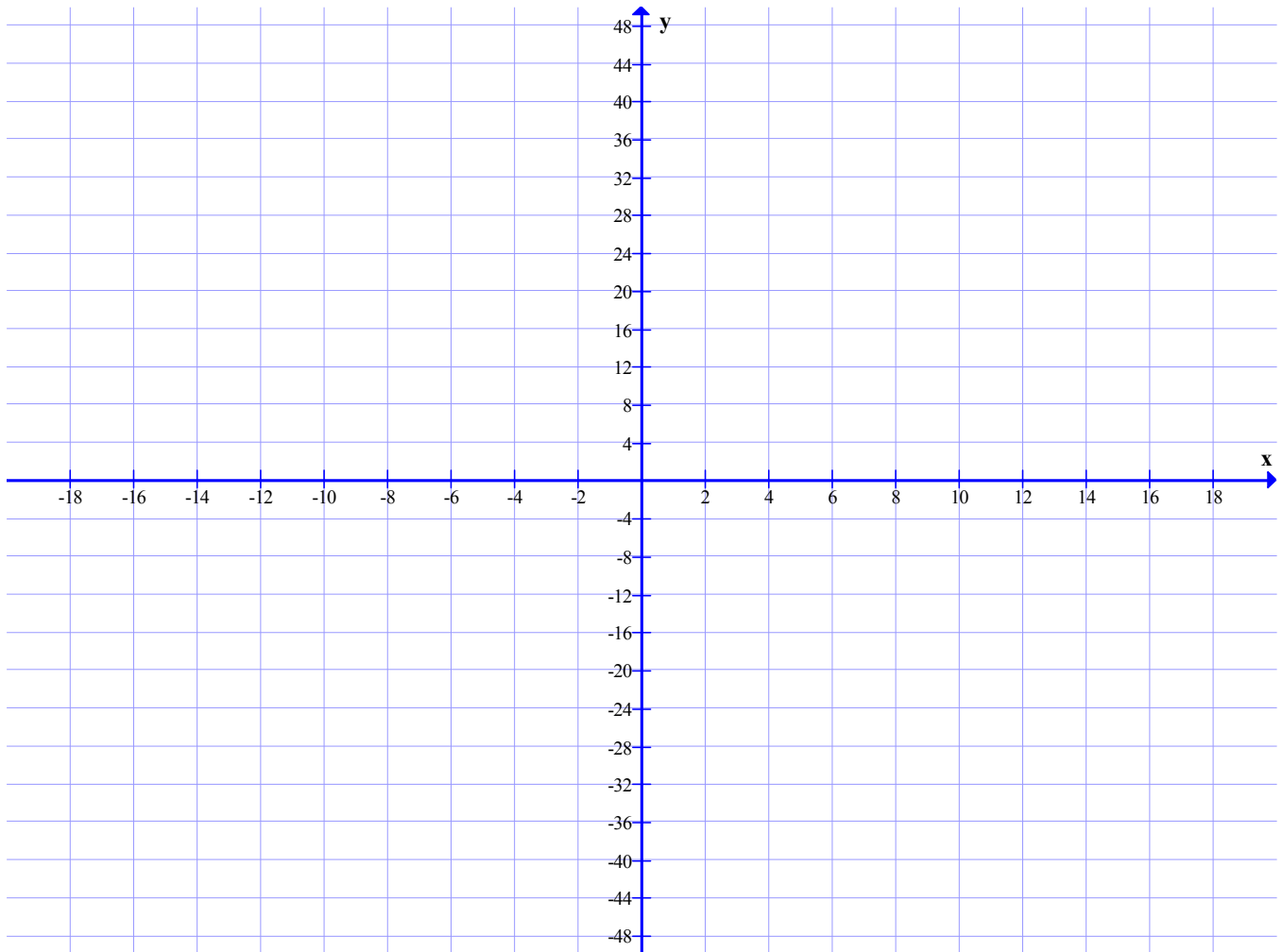
Tabla 1
 Recolección de Datos

Rectángulo #	Largo	Ancho	Perímetro
1	10 cm		
2	10 cm		
3	10 cm		
4	10 cm		
5	10 cm		
6	10 cm		

Tabla 2
 Pares Ordenados para Graficar

x (variable independiente: _____)	y (variable dependiente: _____)

C. Construir una gráfica usando los puntos de la tabla #2.



D. Análisis matemático:

Escribe la fórmula general para el perímetro de un rectángulo usando P para representar el perímetro, w para representar el ancho y l para representar el largo.

Ajusta la fórmula anterior para formar la ecuación que describe el experimento que realizaste. Recuerda que en los 5 casos el largo del rectángulo era constante, 10 cm.

- E. Utiliza la ecuación de la parte D, para contestar las siguientes preguntas. Muestre todo tu trabajo.
7. Si el ancho es 16 cm, ¿cuánto es el perímetro?

 8. ¿Cuán ancho es un rectángulo con largo igual a 10 y perímetro igual a 60 cm.

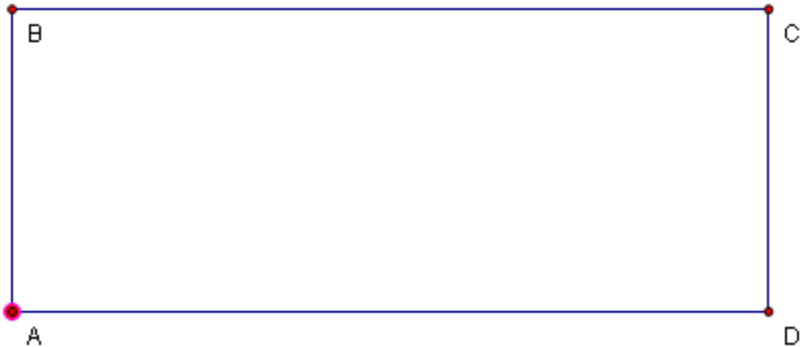
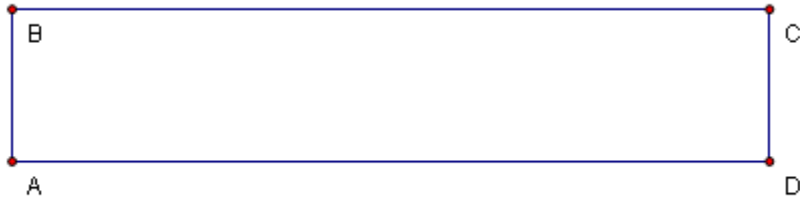
 9. ¿Qué interpretación física se puede dar al intercepto en y de tu gráfica para este problema? ¿Representa el intercepto en y un par de valores realmente posibles para el problema?

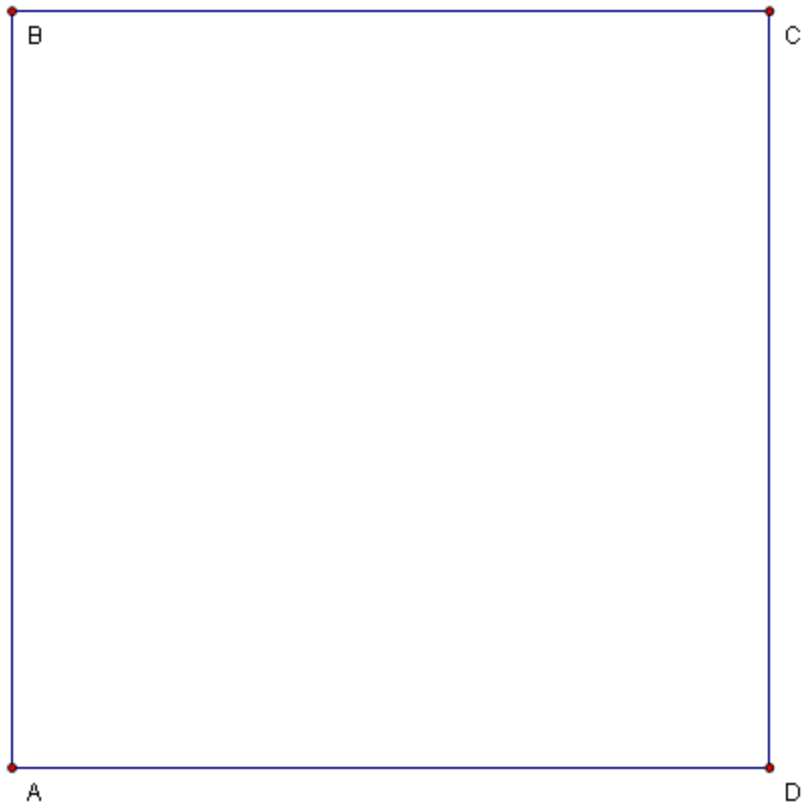
 10. ¿Cómo cambiaría tu gráfica si el largo del rectángulo fuera 15 cm.?

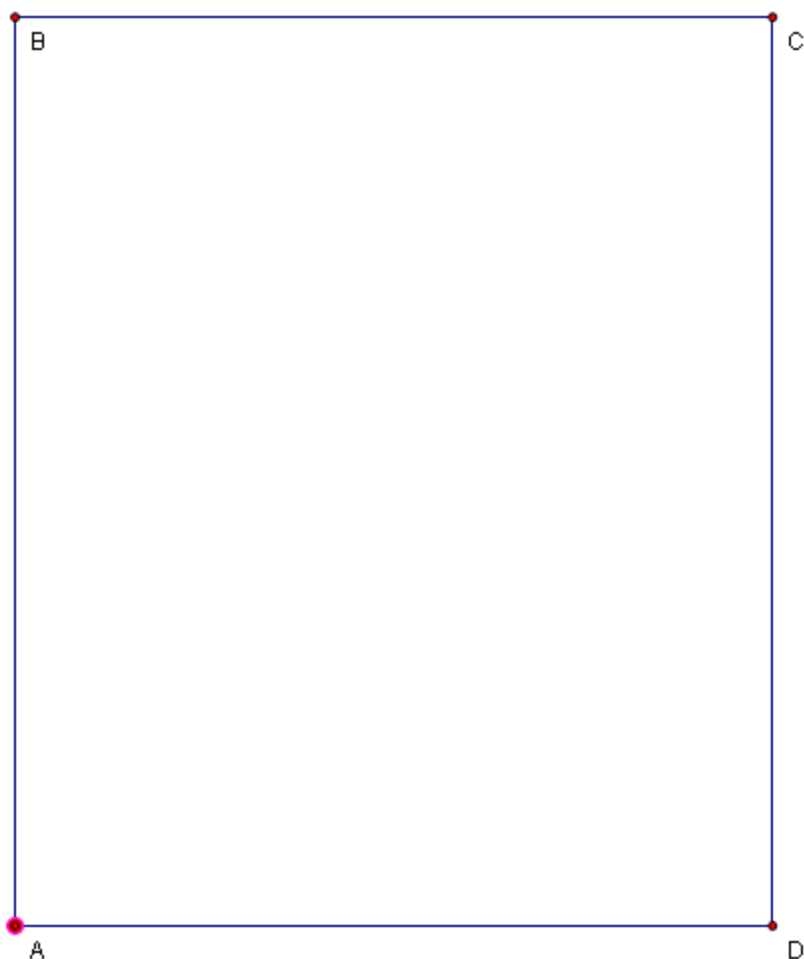
 11. ¿Cómo cambia el perímetro con cada aumento de 2 centímetros en el ancho? ¿Cómo cambia el perímetro con cada aumento de 1 centímetro en el ancho?

12. ¿Cuál es la pendiente de tu ecuación?
¿Qué sentido físico tiene la pendiente de tu ecuación para esta situación?
13. ¿Es posible describir la relación entre el perímetro y el ancho de un rectángulo con largo igual a 10 cm con una ecuación lineal que tenga una pendiente diferente de 2? Justifica tu respuesta.

Ejemplos de Rectángulos para actividad: Rectángulos y Perímetros







Referencias:

Winter, Mary Jean., Ronald J. Carlson. Algebra Experiments I: Exploring Linear Functions. Dale Seymour Publications, 1993.

Friel, Susan., et al., Navigating Through Algebra in Grades 6 - 8 (Print-Non-Fiction). (Principles and Standards for School Mathematics Navigations Series). National Council of Teachers of Mathematics (SES), 2001.