Título: ¡Exploremos patrones!

Autores: Prof. Jaime W. Abreu Ramos
Prof. Wanda Villafañe Cepeda

Nivel: 7 - 9

Objetivo: Los estudiantes resolverán ejercicios que modelen el razonamiento inductivo, utilizando patrones.

Objetivos específicos:
Durante la actividad, los estudiantes:

a. Determinarán los próximos términos de un patrón e indicarán la regla general que define alguna de sus características.
b. Utilizarán la calculadora gráfica para ilustrar el comportamiento de algunas expresiones.
c. Definirán lo que es una conjetura y lo que es el razonamiento inductivo.
d. Utilizarán variables para representar reglas generales.
e. Construirán contraejemplos para demostrar que una aseveración es falsa.
f. Resolverán ejercicios de aplicación en el cual incorporarán el razonamiento inductivo.

Estándares atendidos:
De contenido:
Álgebra

- Representa y analiza variedad de patrones con tablas, gráficas (planas o al relieve), palabras y símbolos algebraicos.

Geometría

- Interpreta relaciones entre perímetros, áreas y volúmenes.
- Utiliza criterios deductivos e inductivos en argumentos concernientes a ideas geométricas.

De proceso:

Razonamiento y prueba

- Examina patrones y estructuras para identificar regularidades.
- Formula relaciones y conjeturas de forma alterna sobre relaciones observadas en investigaciones matemáticas.
- Evalúa conjeturas, seleccionando diferentes tipos de argumentos de razonamiento y los demuestra.

Comunicación

- Organiza, presenta y explica sus procedimientos, usando argumentos matemáticos en forma oral y escrita.
- Expresa sus ideas claras, precisas y coherentes a sus compañeros de clase de manera oral y escrita.
- Justifica conjeturas, utilizando argumentos claros y precisos.

Tiempo sugerido: 2 periodos de clase (aproximadamente)

Materiales y equipo:

- Guía del estudiante para cada alumno.
- Tijeras para cada estudiante
- Pega para cada pareja de estudiantes
- 10 piezas que representan la variable x del manipulativo "algebra tiles" para cada estudiante
- 10 piezas que representan la variable x del manipulativo "algebra tiles" para colocar en el proyector vertical
- Calculadora gráfica TI – 83 Plus Silver Edition o TI – 84 Plus Silver Edition para cada estudiante
- Calculadora gráfica TI – 83 Plus Silver Edition o TI – 84 Plus Silver Edition de proyector, "view screen" o TI – presenter
- Proyector vertical o proyector digital (si se usa el TI – presenter)

<u>Preparación</u>:

Puede colocar a los estudiantes en parejas para trabajar los ejercicios incluidos en la actividad. Lo importante es que se fomente el hecho de que puedan explicar (justificar) su razonamiento.

<u>Introducción</u>:

En esta actividad se pretende que los estudiantes pasen por el proceso de usar el razonamiento inductivo antes de definirles el mismo. Específicamente, en la parte de "**inicio**" se les presentan unas situaciones en las cuales se espera que observen el patrón que las distingue y que puedan llegar a la regla general que define alguna de sus características. En particular, en los ejercicios 1 – 3 se trabaja con distintas figuras geométricas y se les solicita que determinen el perímetro de éstas y que digan la regla general para determinar cada uno de ellos. Se concluye esta parte discutiendo la importancia de utilizar variables en lugar de valores específicos.

En la parte de "**desarrollo**", se define lo que es el razonamiento inductivo y se les presentan algunas situaciones en las cuales aplicarán el uso de expresiones con variables (ejercicios 4 y 5). Además, se define lo que es una conjetura y un contraejemplo y se les presentan ejercicios en los cuales utilizarán contraejemplos para demostrar que las aseveraciones son falsas (ejercicios 6 y 7).

Además, en la parte de "**cierre**" se le presenta un ejercicio en el cual indicarán si las aseveraciones son ciertas o falsas, si son falsas presentarán un contraejemplo que lo ilustre. Además, se presenta un ejercicio de aplicación, en el cual incorporarán el razonamiento inductivo.

En la actividad, se incorpora el uso de la calculadora gráfica para ayudar a visualizar los distintos comportamientos de las expresiones. Se incluye paso a paso lo que se debe hacer para lograr este particular. Específicamente, se incluyen las distintas pantallas a las que se hace referencia en la actividad, de esta forma, será más fácil encontrar las mismas.

En la parte de **assessment**, se les solicita a los estudiantes que escriban una carta a un compañero, el cual estuvo ausente a clases. En ésta, le explicarán lo discutido en la clase de hoy, de esta forma se integra el estándar de proceso de comunicación y se motiva a que los estudiantes expliquen en sus propias palabras lo aprendido.

<u>Procedimiento</u>:

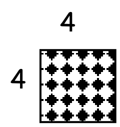
Inicio:

<u>Ejercicio 1</u>:

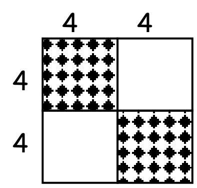
Presente a los estudiantes la siguiente situación:

Considera los siguientes cuadrados, en los cuales se muestra la medida de cada lado:

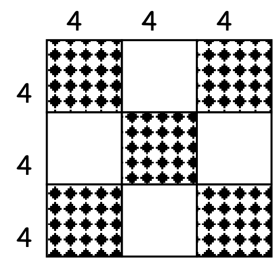
<u>Figura 1</u>



<u>Figura 2</u>



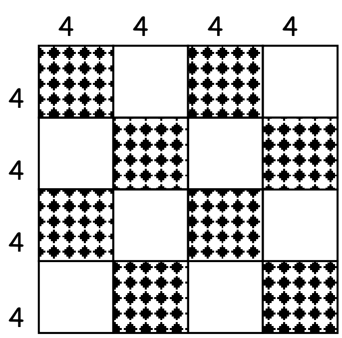
<u>Figura 3</u>



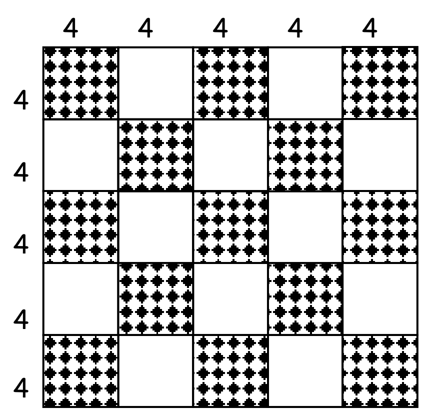
1. Sigue el patrón y construye las figuras 4 y 5.

   Respuestas:

<u>Figura 4</u>



<u>Figura 5</u>



2. Completa la tabla que se presenta a continuación (Tabla 1), en la cual escribirás los perímetros de todas las figuras anteriores:

   Respuesta:

Tabla 1

Figura	Perímetro	Perímetro (Factorizado)
1	16	16(1)
2	32	16(2)
3	48	16(3)
4	64	16(4)
5	80	16(5)

3. Escribe una expresión algebraica que resuma el perímetro de las figuras anteriores. *Respuesta: P = 16n, n representa la cantidad de cuadrados en cada lado de la figura dada.*

Ejercicio 2:

Comparta con los estudiantes la siguiente situación:

Considera los siguientes triángulos, en los cuales se muestra la medida de cada lado:

Figura 1

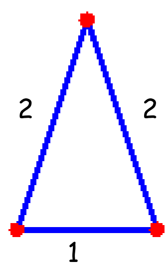


Figura 2

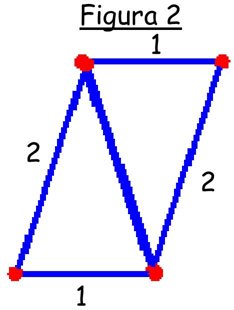
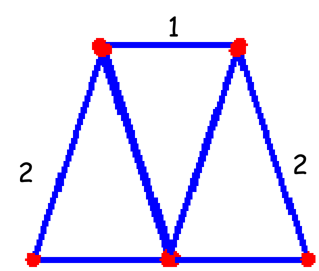


Figura 3



1. Sigue el patrón y construye las figuras 4 y 5. Utiliza los triángulos que aparecen al final de la actividad (en la página 16), recórtalos y pégalos debajo de donde dice Figura 4 y Figura 5.

Figura 4

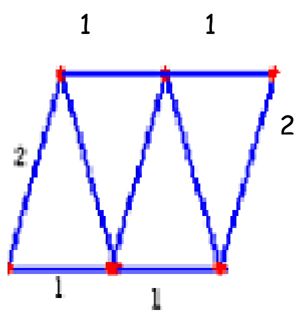
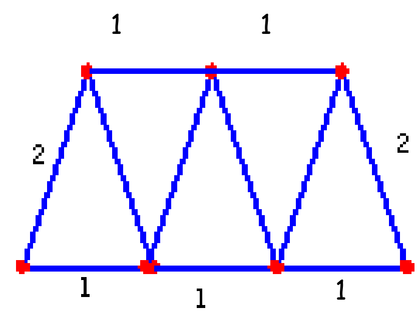


Figura 5



2. Completa la tabla que se presenta a continuación (Tabla 2), en la cual escribirás los perímetros de todas las figuras anteriores:

Respuesta:

Tabla 2

Figura	Perímetro	Perímetro (Expresado como una suma)
1	5	5 = 4 + 1
2	6	6 = 4 + 2
3	7	7 = 4 + 3
4	8	8 = 4 + 4
5	9	9 = 4 + 5

3. Escribe una expresión algebraica que resuma el perímetro de las figuras anteriores. *Respuesta: P = 4 + n, n representa la cantidad de triángulos de la figura.*

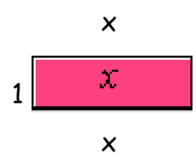
Nota: El ejercicio a continuación requiere el uso de algunas de las piezas del manipulativo algebra tiles. En particular, se usará la pieza que representa la variable *x*.

Ejercicio 3:

Utiliza las piezas siguientes del manipulativo algebra tiles para formar rectángulos. Algunos rectángulos podrán ser "altos" y otros podrán ser "largos". Forma todos los rectángulos posibles con las piezas que se ofrecen, determina su perímetro y escríbelo en la Tabla 3.

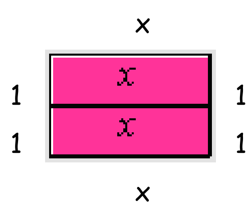
1. Crearemos rectángulos utilizando la *x* de los algebra tiles, colocando cada losa al lado de la otra. Se muestran los 2 primeros casos. En los demás, utiliza las piezas del manipulativo para trazar el contorno de éstas (para hacer el dibujo).

Con una pieza:

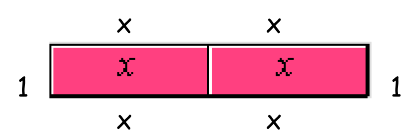


Con dos piezas:

Rectángulo alto



Rectángulo largo



Con tres piezas:

Rectángulo alto

Rectángulo largo

Con cuatros piezas:

Rectángulo alto

Rectángulo largo

Con cinco piezas:

Rectángulo alto

Rectángulo largo

Respuesta:

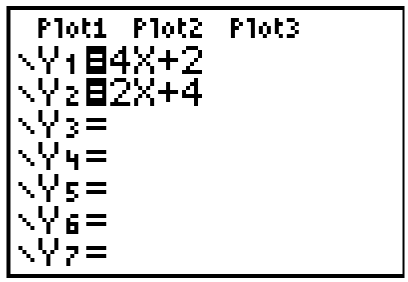
Tabla 3

Cantidad de piezas	Perímetro de los rectángulos altos	Perímetro de los rectángulos largos
1	2x + 2	2x + 2
2	2x + 4	4x + 2
3	2x + 6	6x + 2
4	2x + 8	8x + 2
5	2x + 10	10x + 2

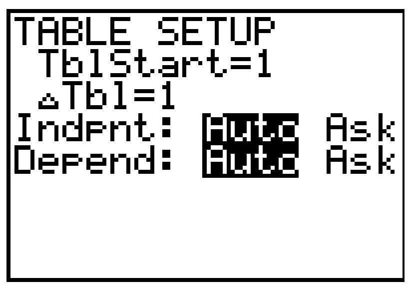
2. ¿Qué tipo de rectángulo crees que tiene el perímetro mayor?

NOTA: Para ayudar a visualizar lo que se cuestiona en la pregunta anterior, puede incorporar el uso de la calculadora gráfica, donde colocará en y_1 alguna de las expresiones algebraicas de los rectángulos altos y en y_2 escribirán alguna de las expresiones de los rectángulos largos (¡Claro que correspondan a la misma cantidad de piezas!).

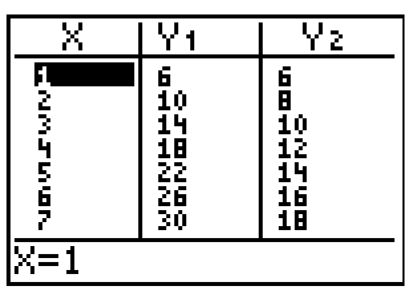
- Por ejemplo, escriba: $Y_1 = 4x + 2$, $y_2 = 2x + 4$. Es decir, tendrá lo siguiente:



- Oprima 2ND WINDOW para acceder a TBLSET y escriba lo siguiente:



- De esta forma, la tabla comenzará en x = 1 y el cambio será de uno en uno.
- Oprima 2ND GRAPH para acceder a la tabla de valores, obtendrá lo siguiente:



- Se observa que el perímetro mayor lo tendrán los rectángulos largos (representados en y_1 con la ecuación: $y = 4x + 2$), siempre que $x \neq 1$. Guíe a los estudiantes a que observen que los perímetros de los rectángulos altos aumentan por un factor de 2, mientras que los perímetros de los rectángulos largos aumentan por un factor de 2x. Como x siempre es positiva, implica que los perímetros de los rectángulos largos siempre serán mayores que los de los altos. Es decir, esta última es la explicación algebraica de este comportamiento. Puede usar otro par de ecuaciones para verificar este comportamiento.

3. ¿Cuáles son las ventajas de utilizar una expresión con variable en lugar de una tabla para mostrar como cambian las cosas?

Desarrollo:

1. La pregunta anterior debe llevar a la discusión con los estudiantes de la importancia de utilizar variables, ya que una expresión con variables ofrece una regla general, es decir, no se limita sólo a unos valores en particular.

2. Observe que en los ejemplos anteriores, se trabajó desde algunos de los casos específicos (particulares), hasta llegar a una regla general, la cual expresamos con variables. A este tipo de razonamiento se le llama: ***razonamiento inductivo***. No obstante, es importante enfatizar a los estudiantes que en matemáticas utilizamos el razonamiento deductivo, esto es, éste va de lo general a lo particular. Esto trae como consecuencia lo siguiente: decimos que algo es cierto cuando ya se ha demostrado, no cuando tenemos varios casos donde se aplique lo que estamos diciendo, ya que puede ser cierto para n casos, pero falso para el caso (n + 1).

3. Presente la siguiente situación en la cual aplicarán el uso de expresiones con variables.

Ejercicio 4: **Árboles en jarros**

Científicos del Departamento de Agricultura de Estados Unidos están desarrollando un método para el cultivo de árboles de manzana. Los científicos colocan retoños de la planta en jarros de 16 onzas en un medio favorable para el crecimiento. Tapan los jarros con platos de 4 pulgadas. En cada jarro crecen 40 retoños que desarrollan raíces en 4 semanas, aproximadamente. Al cabo de dos meses adicionales, ya las pequeñas plantas pueden sobrevivir fuera de los jarros. Los científicos tienen la esperanza que este nuevo método ayude a los horticultores a ahorrar dinero. El método que actualmente se utiliza para el cultivo de nuevos árboles cuesta alrededor de $5.00 por árbol. Con el nuevo método, el costo por árbol sería menos de $2.00.

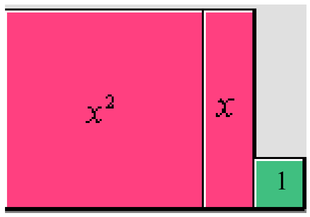
a. Utiliza la información anterior para escribir 3 expresiones que contengan variables. Explica lo que representan esas expresiones con variables.

Posibles respuestas:

Expresión algebraica	La variable representa:	La expresión algebraica representa:
16 n	n = Cantidad de jarros	Cantidad de onzas en los jarros
40 n	n = Cantidad de jarros	Cantidad de árboles que crecen en los jarros
5 m	m = Cantidad de árboles	Costo de los árboles a $5.00 cada árbol

4. Presente a los estudiantes la siguiente situación, en la cual se les pide que escriban una expresión para el área cubierta por las losas.

Ejercicio 5: Observa la ilustración que se presenta a continuación. Escribe una expresión algebraica para el área cubierta por las losas.



Respuesta: $x^2 + x + 1$

5. Por otro lado, una conjetura es una aseveración basada en tus experiencias. No todas las conjeturas son ciertas. Un **contraejemplo** es un ejemplo que muestra que una aseveración es falsa. En matemáticas, al presentar un contraejemplo, es suficiente para demostrar que algo es falso. Resuelve los ejercicios 6 y 7 en los cuales utilizarás este particular.

Ejercicio 6: ¿Es cierto que $x^2 > x$ para todo número real? Si no lo es, ¿para qué números reales es cierto? Puedes usar la calculadora para verificar tu conjetura.

Respuesta: No es cierto para todo número real. Esto es, es cierto para algunos números reales, pero para otros es falso. Contraejemplos:

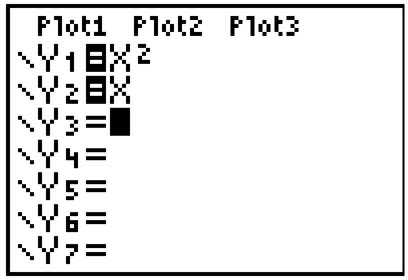
0, ya que 0^2 no es mayor que 0.

1, ya que 1^2 no es mayor que 1.

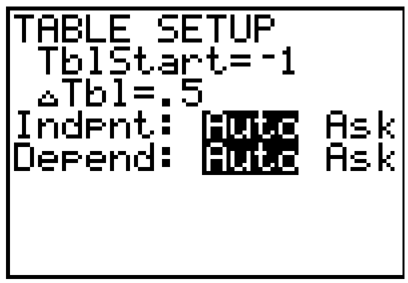
Los números entre 0 y 1 también son contraejemplos, observe: si x = ½, entonces x^2 = (½) (½) = ¼ y ¼ No es mayor que ½. En general, para todas las fracciones propias (que están entre 0 y 1), x^2 siempre será menor que x.

Puede incorporar el uso de la calculadora gráfica para el ejercicio anterior. Los pasos para hacerlo son los siguientes:

1. Escriba en Y= lo siguiente:

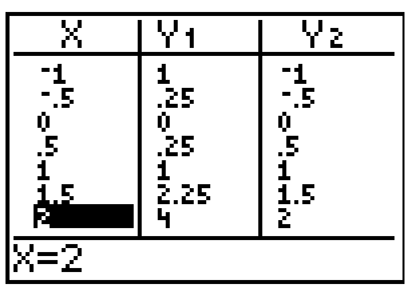


2. Oprima 2ND WINDOW, para acceder a TBLSET y escriba lo siguiente:



De esta forma, la tabla comenzará desde –1 y los valores de x cambiarán de .5 en .5.

3. Oprima 2ND GRAPH para acceder a TABLE, verá lo siguiente:



- Se observa que para lo siguientes valores de x, $Y_1 > Y_2$, es decir: $x^2 > x$:

  x = -1, x = -.5, x = 1.5, x = 2.

- No obstante, para los siguientes valores de x, $Y_1 = Y_2$, es decir, $x^2 = x$:

  x = 0, x = 1.

Prof. Jaime W. Abreu
Prof. Wanda Villafañe

- Para los siguientes valores de x, $Y_1 < Y_2$, es decir, $x^2 < x$: x = .5.

  En conclusión, como la expresión $x^2 > x$ es cierta para unos valores y falsa para otros, decimos que la misma es falsa, ya que para ser cierta lo tiene que ser para **todos** los valores (números).

Ejercicio 7: Luis escribió la siguiente aseveración: $x^5 + x^2 = x^7$, dijo que es cierto para todos los números. Esto es, dijo que es cierto para cualquier valor de x.

a. Presenta un contraejemplo para la aseveración de Luis.
b. ¿Hay algún valor de x que haga cierta la expresión anterior?
c. Corrige la aseveración de Luis de modo que sea correcta.

Respuestas:

a. Algunas opciones de contraejemplos son las siguientes: $2^5 + 2^2 \neq 2^7$

porque $32 + 4 \neq 128$

$36 \neq 128$

b. El único valor que hace cierta la expresión es 0: $0^5 + 0^2 = 0^7$.

c. Para que sea cierta la aseveración, en lugar de suma, tiene que estar la operación de multiplicación, es decir: $x^5 \bullet x^2 = x^7$.

Cierre:

Resuelve los siguientes ejercicios:

I. Indica si las siguientes aseveraciones son ciertas para todos los valores de x ó falsas para algunos valores de x, si piensas que es falso, presenta un **contraejemplo**. Si dices que es cierto, muestra algunos **ejemplos que lo ilustren**.

a. $x + 3 > x$
b. $x^2 \leq (x + 1)^2$
c. $\frac{1}{x} \leq 1$
d. $-x < 0$
e. $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

Recuerde resaltar el hecho de que al presentar algunos ejemplos que ilustren que una aseveración es cierta, **NO** la estamos demostrando, sino, sólo ilustrando, "mostrando".

Respuestas:

a. *Cierto. Ejemplo que lo ilustra, si* $x = 1$*, tenemos:* $1 + 3 > 1$

$4 > 1$*, lo cual es cierto.*

b. *Falso, si* $x = -1$*, entonces:* $(-1)^2 \leq (-1 + 1)^2$

$1 \leq 0$*, lo cual es falso.*

c. *Falso, si x = ½, entonces:* $\dfrac{1}{\frac{1}{2}} \leq 1$

$2 \leq 1$, lo cual es falso.

d. *Falso, si* $x = -1$*, entonces:* $-(-1) < 0$

$1 < 0$*, lo cual es falso.*

e. *Cierto. Ejemplo que lo ilustra, si* $x = 2$*, tenemos:* $(2 + 1)(2 - 1) = 2^2 - 1$

$(3)(1) = 4 - 1$

$3 = 3$

II. Un carro recorre 28 millas con un galón de gasolina. Encuentra qué tan lejos llega el carro con cada cantidad de gasolina.

a. 5 galones
b. 10 galones
c. 50 galones
d. n galones

Respuesta:

a. 28 x 5 = 140 millas
b. 28 x 10 = 280 millas
c. 28 x 50 = 1400 millas
d. 28n

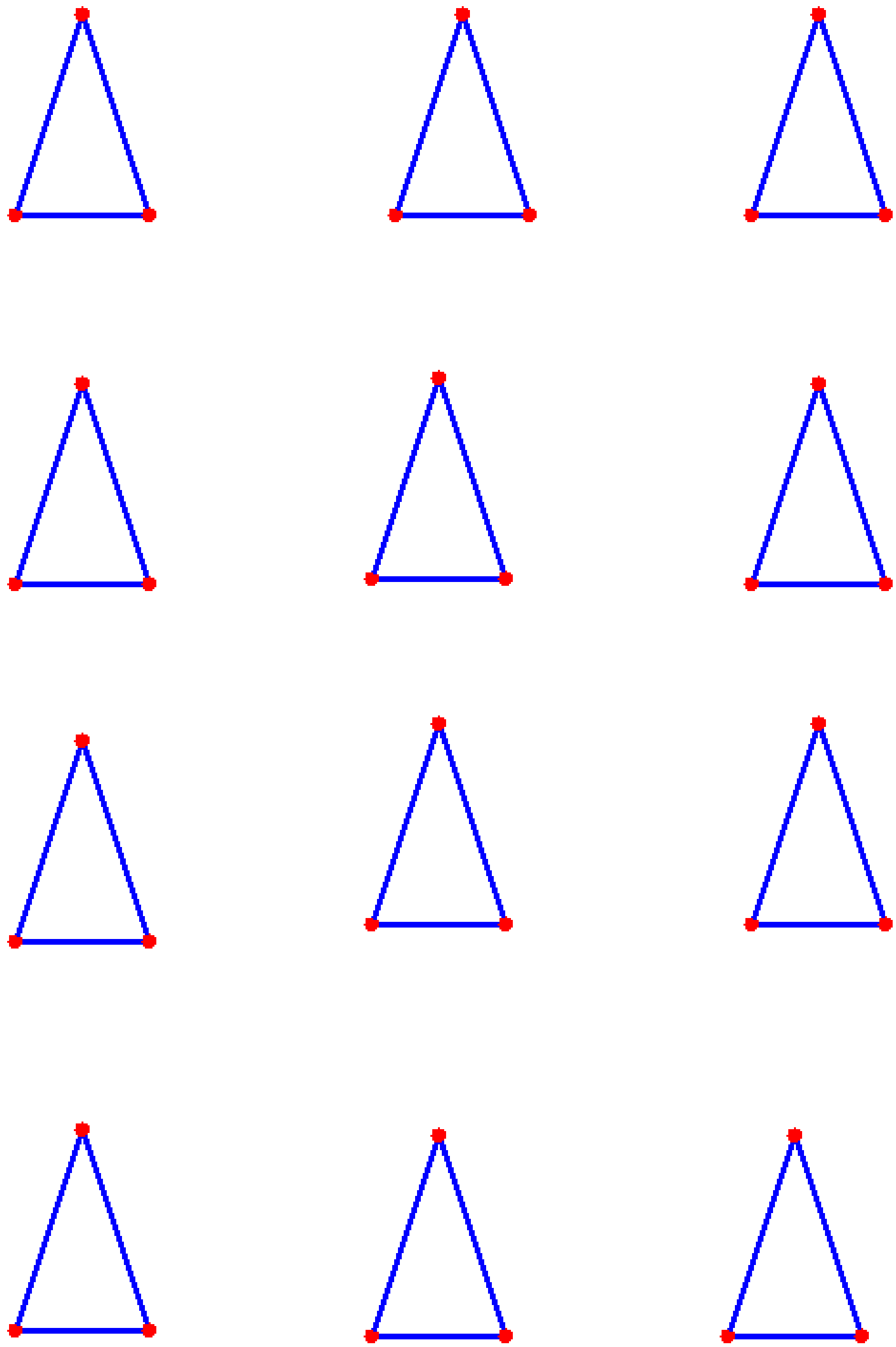
NOTA: Los ejercicios anteriores también pueden resolverse usando una proporción. Enfatice con los estudiantes el hecho de que de unos casos particulares, llegamos a la regla general, lo cual es el principio del razonamiento inductivo.

Assessment:

Supongamos que tu mejor amigo estuvo ausente a la clase de hoy, ¡el pobre tiene una enfermedad muy contagiosa! Por lo tanto, no puedes ir a su casa a explicarle lo que se discutió en la clase de matemáticas. Decides escribirle una carta en la cual le explicarás **todo** el material. Escribe la carta, incluye en la misma todos los detalles posibles, de manera que tu amigo no se atrase en la clase. Presenta otros ejemplos distintos a los discutidos en la esta actividad. La carta tendrá un valor de 10 puntos. La entregarás en la próxima clase.

Nota al maestro: El propósito de la redacción de esta carta es que usted conozca el dominio del contenido discutido, por parte de los estudiantes. Para otorgar todos los puntos, la misma debe estar muy detallada, incluir ejemplos que ilustren lo que se presenta y no poseer errores en el contenido matemático.

Triángulos que recortarán para resolver el ejercicio número 2



Referencias:

Departamento de Educación de Puerto Rico (2000). *Programa de Matemáticas: Estándares.* San Juan, PR: Autor.

Rubenstein, R. N., Craine, T. V., y Butts, T. R. (2002). *Matemática integrada I*. Evanston, ILL: McDougal Littell.

Rubenstein, R. N., Craine, T. V., y Butts, T. R. (2002). *Matemática integrada II*. Evanston, ILL: McDougal Littell.