



AIACiMa

Alianza para el Aprendizaje de Ciencias y Matemáticas
PR – Math and Science Partnership (PR-MSP)
Actividad Matemática – Nivel 7 al 12

Título: The Ultimate Bungee

Nivel: 7-12

Autor: Dr. Edgardo Lorenzo González

Adaptado de: <http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=L646>

Objetivo: Aplicar el Modelo Lineal, en una situación real donde los datos tienen tendencia lineal.

Objetivos específicos:

Al finalizar el taller el maestro será capaz de

1. Recopilar y organizar datos bivariados.
2. Construir el diagrama de dispersión (“scatter plot”).
3. Determinar si los datos bivariados tienen una tendencia lineal, analizando el diagrama de dispersión (“scatter plot”) e interpretando el coeficiente de correlación lineal.
4. Calcular, usando la calculadora, la línea de regresión.
5. Interpretar los coeficientes del modelo lineal en el contexto del problema.
6. Realizar predicciones y someterlas a prueba.
7. Comprender los conceptos de interpolación y extrapolación.

8. Reconocer la importancia del análisis adecuado de los datos en la toma de decisiones.

Estándares atendidos:

De Contenido:

Geometría

Estándar Contenido #3

- Resolver problemas utilizando la visualización, el razonamiento espacial y modelos geométricos.

Álgebra

Estándar Contenido #1

- Efectuar cálculos y estimados razonables.
- Comprender, representar y relacionar los números

Estándar Contenido #2

- Usar modelos matemáticos para representar y entender relaciones cuantitativas.
- Comprender patrones, relaciones y funciones.

De proceso:

Razonamiento y Prueba

- Razona y prueba conclusiones coherentes y lógicas, tanto oral como escrita, utilizando tablas y/o párrafos

Comunicación

- Se comunica efectivamente, trabajando con pares, individual o colaborativamente.
- Comparte con otros sus pensamientos matemáticos y estrategias en forma constructiva y efectiva.

Solución de problemas

- Utiliza la solución de problemas mediante diferentes estrategias

Tiempo sugerido: 3 horas

Conceptos: datos bivariados, variable independiente, variable dependiente, gráficas, intercepto, pendiente, tendencia lineal, correlación lineal, modelo de regresión lineal.

Materiales y equipo:

- Papel cuadriculado
- hoja de trabajo
- marcadores
- papelote
- barbies (2 iguales)
- otro muñeco distinto a barbies (“figura de acción” (2)) con peso mayor a la barbie
- liguillas
- cinta métrica
- franjas de cartulinas (varias franjas de cartulina de aproximadamente 6 pulgadas de ancho, de modo, que al unirse formen una franja 6 pulg. ancho por 5 pies de largo)
- cinta adhesiva
- calculadoras

Introducción:

En esta actividad los participantes investigan la relación entre el número de liguillas utilizadas en la construcción del Bungie y la distancia que recorre el (la) muñeco(a) que realiza el salto. El número de liguillas utilizadas es la *variable independiente* y la distancia recorrida es la *variable dependiente*.

La relación entre x y y es lineal, y el participante debe analizar esta tendencia lineal, según lo muestran los datos que recopilará.

Al finalizar la actividad el participante debe usar la calculadora, con el método de cuadrados mínimos para obtener la ecuación de regresión lineal. Luego, determinará la cantidad de

liguillas que se debe usar de modo que se genere el salto más excitante, pero seguro, basado en la interpretación del modelo de regresión lineal obtenido. Además, interpretará los coeficientes del modelo, en el contexto del problema, y comparará el efecto que tiene el peso del muñeco en los distintos modelos lineales, obtenidos por los distintos subgrupos de trabajo.

Procedimiento:

(Los participantes tendrán copia de las hojas de trabajo de la actividad)

Observación: En este experimento los participantes recogen y grafican datos bivariados. También tendrán que analizar la relación entre sus variables y obtener el modelo de regresión lineal que describe la relación entre sus variables, según los datos recopilados.

Se utilizará la calculadora gráfica para obtener el modelo de regresión lineal, repasar el uso de la calculadora provista antes de hacer la actividad.

Inicio: (30 minutos)

Preparación: (20 minutos)

Durante los primeros 20 min., el capacitador discute y/o repasa varios conceptos discutidos en las capacitaciones anteriores de este verano. El capacitador aplica la técnica de inquirir para: Repasar las características principales de una relación lineal exacta. (Por ejemplo: En las capacitaciones anteriores se han presentado ejemplos de “patrones” lineales, ¿qué características en común tenían estos patrones?)

- patrones donde la razón de cambio es constante
Podemos recordarles que si $y \sim x$ (si y es proporcional a x) se puede establecer la ecuación $y = kx$, donde k es llamada la constante de proporcionalidad. ¿Qué tipo de relación describe esta ecuación?
- describe una relación lineal
¿Cuál es el intercepto en y , en esa relación?
- el intercepto en y es $(0,0)$, esto es, pasa por el origen
¿Si una relación entre x y y tiene una razón de cambio que es “aproximadamente constante”, cómo podemos describir dicha relación?
- podemos decir que x y y tienen una tendencia lineal

¿Cómo podemos detectar una “tendencia lineal”?

- Entre otras formas, usando el “scatter plot” podemos detectar si los puntos que corresponden a la relación entre x y y muestran un comportamiento que se pueden ajustar por una línea recta.

Observación: Si recopilamos datos, donde siempre hay variabilidad presente, el modelo lineal que podría ajustar los datos, se percibe, a través de los datos recopilados, como una “tendencia lineal”.

- Luego, el capacitador discutirá el coeficiente de correlación lineal, r , (brevemente), así como el uso de la calculadora para determinar r y la ecuación de regresión, con el método de cuadrados mínimos. **(5 min.)**

NOTA: Las fórmulas de cálculo manual del coeficiente de correlación lineal y de los coeficientes de regresión lineal, se discutirán más adelante en la capacitación.

- **El capacitador describe la actividad a los participantes (5 min.)**

“La idea de la actividad es que los estudiantes *modelen* un salto en bungee, usando una muñeca de Barbie (y figura de acción similar) y liguillas de gomas. La intención es determinar que cantidad de liguillas se debe usar de modo que se genere el salto más excitante, pero seguro, esto es, que la figura recorra la mayor distancia, sin golpearse con el piso.”

Como la distancia que la figura de acción recorrerá es directamente proporcional al número de liguillas usadas, se describe una relación lineal. Sin embargo, como se recopilan los datos, en forma experimental, esta relación lineal no se puede determinar de forma exacta, y por tanto, hablamos de una “tendencia lineal de los datos”

DESARROLLO:

Dividir los participantes en 4 grupos de 3 ó 4 participantes por grupo. A cada grupo se le entregará una figura de acción, liguillas (previamente amarradas de 2,4,6,8,...) cinta métrica, marcadores, papelotes y hoja de trabajo grupal (3 páginas) **(5 min.)**

Instrucciones para el trabajo en grupo: (10 min.)

1. Asignar roles

Primero cada grupo identifica un anotador (encargado de anotar los datos en la hoja de trabajo), observador que determine, la distancia recorrida por la figura y un presentador (persona encargada de presentar el papelote del grupo a la asamblea general).

2. Realizar predicción

Cada grupo hace la predicción, sobre x: número máximo de liguillas que espera se puedan usar cuando “Barbie”(o figura de acción correspondiente) cuando salte de una altura de 5 pies, de modo que el salto sea lo más excitante posible, pero seguro.

3. Recopilación de datos

La plataforma de salto:

- Indicar a los participantes que preparen la “plataforma de salto”, esto es, identificar un lugar que pueda servir de plataforma (a una altura fija de 5 pies), de donde puedan dejar caer (NO EMPUJAR), la figura de acción sin contratiempos (que la figura pueda desplazarse libremente, que se pueda realizar la medición,...)
- Inmediatamente al lado (o debajo) de la plataforma de salto, pegar el pedazo de cartulina en la cual se rotulará una escala apropiada para poder medir la distancia que se desplaza la figura de acción.

NOTA: Escala con precisión adecuada, en cm., y escala en forma ascendente (0cm, 5cm, 10cm,...) de modo que se mida la distancia recorrida, aquí 0cm debe estar alineado con la base de la plataforma de salto.

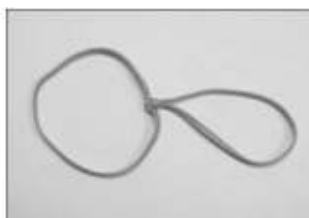
Pasar al experimento que permitirá la recolección de datos, para x: determinado número de liguillas, se mide la distancia que la figura recorrió (en cm.)

Para cada valor de x , deben repetir el salto tres (3) veces, finalmente tomarán el promedio de las tres distancias recorridas por la figura de acción como el valor respuesta y .

El lazo del bungee: (las liguillas han sido previamente amarradas (2, 4,6,...))

Usar el segmento de liguillas correspondientes (liguillas nuevas en cada salto para evitar la “fatiga” de las liguillas.

Ambas piernas de la figura de acción deben ser amarradas a las liguillas.



Una vez los datos han sido recopilados, completen la hoja de trabajo y preparen la versión final de la hoja de trabajo en el papelote provisto.

4. Realizar el experimento y Trabajo en grupos **(75 min.)**
5. Aclarar dudas **(10 min.)**

CIERRE

1. Los participantes preparan el papelote y discusión del mismo en asamblea **(30 min.)**

Ver preguntas guías **(20 min.)**
2. Discusión y someter a prueba las predicciones.

(Llevar a cabo salto “boggie”, usando: $x = 7$ liguillas, x : número de liguillas que el grupo predijo para un salto de 5 pies (en contestación a pregunta 3, en la hoja de trabajo)

3. Reflexión Final. (5 min.)

Assessment:

MODELO DE RUBRICA PARA EL ASSESSMENT DEL TRABAJO GRUPAL

Diseñando el “Ultimate Bungie”		Puntuación(1- 5)
ANÁLISIS	El trabajo demuestra un entendimiento de los conceptos matemáticos.	
APLICACIÓN	Todos los integrantes del grupo trabajaron activamente durante el taller	
REPRESENTACIÓN	Los datos recopilados son precisos El diagrama de dispersión es adecuado. (título, escala, puntos) La ecuación de la línea de mejor ajuste es adecuada, según los datos recopilados.	
EXPLICACIÓN	La relación entre las variables es claramente expuesta Los parámetros del modelo son interpretados correctamente, según su contexto.	
JUSTIFICACIÓN	Se realizan predicciones y se discute su confiabilidad.	

HOJA PARA TRABAJO GRUPAL

Experimento :
“The Ultimate Bungie”

Nombre: _____

Nombre: _____

Nombre: _____

A. Describe la predicción que realizaste, para el salto a una altura de 5 pies.

B. Datos recogidos

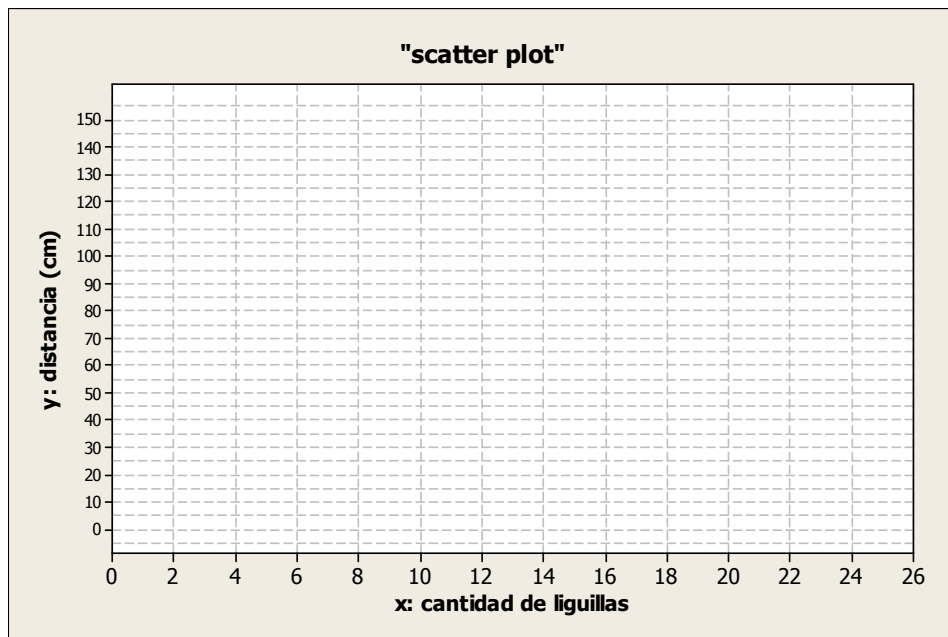
Tabla 1: Recolección de Datos

x: número de liguillas	distancia 1 recorrida (cm.)	distancia 2 recorrida (cm.)	distancia 3 recorrida (cm.)	y:distancia promedio (cm.)
2				
4				
6				
8				
10				
12				
20				

Tabla 2: Pares Ordenados para graficar

x (variable independiente: _____)	y (variable dependiente: _____)

C. Construir "scatter plot usando los puntos de la Tabla #2.



D.

Según los datos recopilados en la parte B, ¿qué tipo de relación aparentan seguir los datos?

¿Está tu contestación a la pregunta anterior de acuerdo a lo que sugiere el scatter plot en la parte C? ¿Por qué?

Escribe la fórmula para el modelo de regresión lineal. (Usando calculadora)

¿Puedes justificar como adecuada la decisión de ajustar un modelo de regresión lineal a los datos recopilados?

E. Utiliza la ecuación de la parte D, para contestar las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la interpretación de los coeficientes del modelo (intercepto, pendiente) en el contexto del problema?
2. ¿Según tu modelo, qué distancia esperarías que recorre la figura de acción si se utilizan 5 liguillas, 7 liguillas, 25 liguillas?
3. ¿Según tu modelo, cuál debería ser el valor de x , para que la figura recorra la distancia de 5 pies? ¿Cómo compara esto con tu predicción inicial?
4. ¿Cómo cambiaría tu gráfica y tu modelo de regresión si tu figura de acción hubiese sido una más pesada?

5. ¿Cómo cambiaría tu gráfica y tu modelo de regresión si las liguillas usadas fuesen más flexibles?

6. ¿Crees que fue importante usar y : promedio de las tres (3) distancias recorridas?
¿Por qué?

7. ¿Qué otro factor además de x , debemos tener en consideración en la construcción de un Bungie?

Preguntas Guías Para la discusión de Papelotes en Asamblea

1. Basados en la definición de nuestras variables x, y , ¿qué signo esperarías que tenga la pendiente de la posible línea que las relacione? ¿Cuál sería el posible valor del intercepto en y ? ¿Están tus contestaciones anteriores de acuerdo con lo que podría sugerir el diagrama de dispersión?

Esperamos que el participante indique que existe pendiente positiva (si x aumenta, y aumenta), el intercepto en y no tiene interpretación, el diagrama de dispersión indica que los datos "aparentan" mostrar una relación lineal" y que dicha relación debe tener una pendiente positiva porque la posible línea recta es ascendente.

Para fomentar la discusión...

¿Qué tiene que pasar para que la pendiente de una recta sea positiva? ("Cambios en una misma dirección, si x aumenta (disminuye), y aumenta (disminuye)")

¿Cómo obtenemos el intercepto en y en general?

¿Qué quiere decir que $x = 0$ en el contexto de nuestro problema?

2. Comenten, sobre la decisión de tomar y : como el promedio de las tres observaciones realizadas. ¿Crees que fue una decisión adecuada? ¿Cómo pudo afectar esta decisión la precisión de tu modelo?

Esperamos que el participante indique:

Decisión adecuada porque reducimos la variabilidad (recordar que si $\text{var}(\text{observación}) = \sigma^2$, luego $\text{var}(\text{promedio de 3 obs}) = \frac{\sigma^2}{3}$) y por tanto, la relación lineal será más fácil de detectar y aumenta la precisión de nuestro modelo.

Para fomentar la discusión...

¿Cómo cambiaría la variabilidad de los datos recopilados, si hubiésemos tomando $y :=$ un solo valor observado, en lugar del promedio de tres valores observados?

¿Qué efecto tendría ese cambio en nuestro diagrama de dispersión? ¿En nuestro modelo?

3. Similar a la pregunta 2, ¿Cómo pudo afectar el haber identificado a una persona para tomar la medida de la distancia recorrida por la figura la precisión de tu modelo?

Esperamos que el participante indique: el efecto apreciación de la medida permanece constante, porque es la misma persona que toma la medida.

4. ¿Qué diferencia observamos al comparar los modelos de los grupos que tenían distintas figuras de acción?

Esperamos que el participante indique

Que los modelos de los grupos que tenían figuras de acción más pesadas tienen una pendiente mayor por el efecto del peso de la figura.

Para fomentar la discusión...

¿Qué diferencia existían entre las figuras de acción de los distintos grupos?

¿Si su grupo cambia de figura con el otro grupo, cómo se afectaría el modelo lineal obtenido?

5. ¿Qué importancia tienen estas diferencias en el contexto real del problema?

Esperamos que el participante indique que si fuésemos a diseñar un Boggie real, debemos considerar como parte de los criterios de seguridad, el peso del participante.

6. Un “outlier”, o valor extremo es un valor en la variable respuesta y, que es “demasiado” grande o demasiado pequeño. ¿Cuál sería la interpretación de un “outlier” en el contexto de este problema?

Esperamos que el participante indique que un valor demasiado grande o demasiado pequeño sería un salto en el que el participante recorrió una distancia “demasiado grande” (esto podría representar problemas de seguridad”) o una distancia muy corta (“le devolvemos el dinero?”)

Para fomentar la discusión...

¿Qué representaría un outlier superior en el contexto de este problema?

¿Qué representaría un outlier inferior en el contexto de este problema?

¿Cuál de los dos casos preferirías tener? ¿Por qué?

Verificando las predicciones...

7. ¿Qué distancia recorrió la figura cuando usaste 7 liguillas? ¿Cómo compara el valor observado en y , con el valor respuesta que predecía tu modelo?

Esperamos que el participante reconozca que al usar $x = 7$, es un caso de interpolación

8. ¿Qué distancia recorrió la figura cuando usaste el número de liguillas que estableciste al contestar la pregunta 3? ¿Cómo compara el valor observado en y , con el valor respuesta que predecía tu modelo para recorrer la distancia de 5 pies?

Breve nota informativa sobre el coeficiente de correlación lineal r :

- r mide el grado o la fortaleza de la asociación lineal entre x y y
- $-1 \leq r \leq 1$
- Al tener un valor numérico que nos cuantifique el grado de asociación lineal, ya NO dependemos de la apreciación (como sería el caso si sólo usamos el scatter plot para determinar si existe una relación lineal entre las variables)
- el signo de r corresponde a la naturaleza de la relación lineal entre x y y , esto es, el signo de r es igual al signo de la pendiente de la línea que ajusta los datos.
- r sólo mide asociación lineal (NO MIDE ASOCIACIÓN CUADRÁTICA, NI EXPONENCIAL, etc.). Por tanto, si $r = 0$, solo podemos decir que x y y no están asociadas LINEALMENTE. (sería un error decir que $r = 0$, indica que x y y NO están

asociadas, pues puede existir otro tipo de relación, no lineal, que el coeficiente de correlación lineal no puede detectar.