



## Haciendo Papeletas 1

Guía del Maestro  
Nivel 10-12  
Actividad de Matemáticas

### Propósito:

Los estudiantes se encontrarán con patrones de cambio exponencial frecuentemente durante su formación escolar. Esta actividad ha sido diseñada para introducir y brindarle al estudiante una base intuitiva sobre la cual luego construir. El propósito primordial es que los estudiantes aprendan a reconocer situaciones, patrones y gráficas que pueden ser modeladas de forma eficiente por expresiones exponenciales y que también puedan utilizar tablas, gráficas y ecuaciones para contestar preguntas acerca de patrones exponenciales.

### Estándares:

Aplicar las propiedades de los exponentes. Trazar las gráficas de las funciones exponenciales. Resolver ecuaciones exponenciales.

### Tiempo:

Entre uno y dos periodos de clase.

### Materiales:

Papel  $8\frac{1}{2}$ " $\times$ 11" (1 por grupo), tijeras, lápiz, calculadora gráfica TI-83.

### Preparación:

No se requiere de ninguna preparación previa. Toda la información forma parte de la discusión de la actividad.



### Trasfondo:

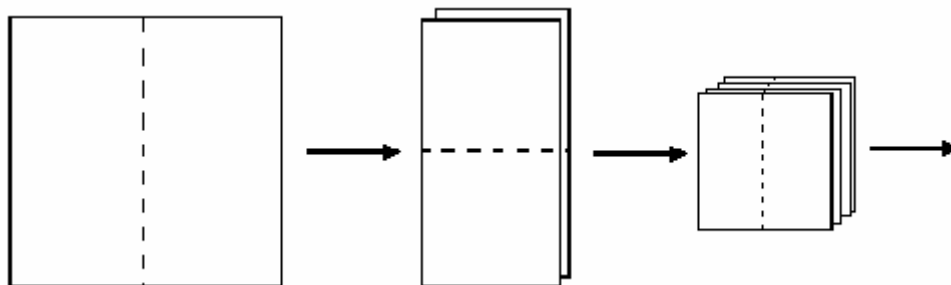
En trabajos previos los estudiantes han explorado relaciones entre variables y han encontrado patrones que les ha permitido expresar las relaciones simbólicamente. Han utilizado gráficas, tablas, y ecuaciones para representar estas situaciones.

En esta actividad donde cortarán papel, explorarán un patrón de crecimiento exponencial.

### Inicio (Instrucciones Preliminares):

Hacer papeletas para votar es una manera "hands on" de introducir el concepto de crecimiento exponencial a los estudiantes. Los estudiantes investigan el crecimiento del número de papeletas creadas al cortar un pedazo de papel por la mitad. La actividad puede trabajarse en grupos de dos a cuatro estudiantes. Presentamos la situación:

Alejandro está haciendo papeletas para votar en una elección. Comienza por cortar el pedazo de papel por la mitad, luego pone los dos pedazos uno encima del otro y hace otro corte por la mitad. Toma los pedazos resultantes y los corta por la mitad. Repite el proceso, creando en cada paso papeletas cada vez más y más pequeñas, como se muestra en la figura.





Luego de cada corte, Alejandro cuenta las papeletas y apunta este número en una tabla

Cortes	Papeletas
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

Alejandro quiere encontrar una manera de poder predecir el número de papeletas que tendrá luego de hacer una serie de cortes.

### Procedimiento:

A medida que los estudiantes cortan y ordenan las papeletas para el próximo corte en los primeros dos o tres cortes pueden visualizar la relación existente entre el número de cortes hechos y el número de papeletas creadas.

Pídales a sus estudiantes que corten un papel, como lo hizo Alejandro, y cuenten las papeletas luego de cada corte. Pídales también que hagan una tabla para mostrar cuántas papeletas hay luego de un corte, luego de dos cortes, luego de tres cortes y así sucesivamente.

Pregunte si observan algún patrón en la manera en que cambia el número de papeletas con cada corte. De ser así, dígales que extiendan su tabla hasta los diez cortes. Luego pregúnteles qué estrategia utilizaron para llegar a sus conclusiones.

*¿Cómo encontró cada entrada en su tabla?*

*¿Cuál es la relación entre este número de papeletas y el número previo de papeletas? (Es dos veces el número anterior.)*

*Explique la relación existente en términos del número de cortes. (Cuando el número de cortes aumenta en uno, el número de papeletas se duplica.)*



Rete a sus estudiantes a encontrar un patrón multiplicativo en la tabla y a justificar su razonamiento.

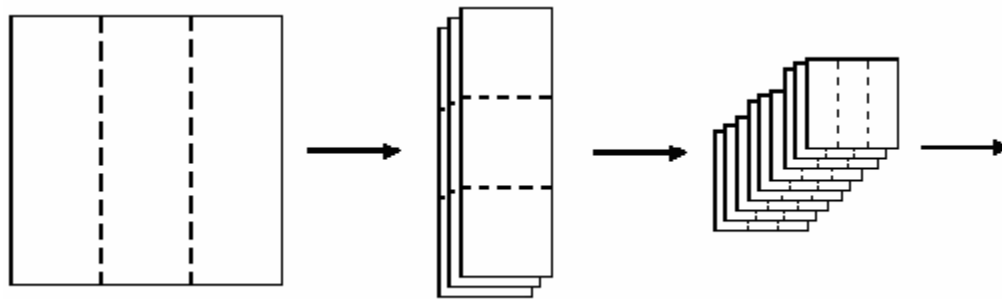
Puede repartir transparencias a los grupos para que escriban sus respuestas al problema durante el resumen.

Pregunte cuántas papeletas se tendrían si se hacen 15 cortes. ¿Cuántas si se hacen 30 cortes?

Cuando encuentre el número de papeletas luego de hacer 10, 20 y 30 cortes, probablemente te encuentre multiplicando largas filas de 2's. En lugar de escribir esas largas filas del mismo factor, puedes utilizar su **forma exponencial**. Por ejemplo, puedes escribir  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$  como  $2^5$ , que se lee "dos a la cinco". En la expresión  $2^5$ , 2 es la **base** y 5 el **exponente**. Cuando evalúas  $2^5$ , te da  $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ . Decimos que 32 es la **forma estándar** de  $2^5$ .

Si tienes el producto  $3 \times 3 \times 3 \times 3$ , ¿cómo lo relacionarías al corte de papeletas?

Habría que triplicar el número de papeletas en cada paso. Así  $3 \times 3 \times 3 \times 3$  sería el cuarto paso en la etapa de crear papeletas, donde cada paso consiste ahora en dar dos cortes en lugar de solo uno.



Escribe cada expresión en su forma exponencial

- $2 \times 2 \times 2$
- $5 \times 5 \times 5 \times 5$
- $1.5 \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5$

Escribe cada expresión en su forma estándar

- $2^7$
- $3^3$
- $4.2^3$



Alianza para el Aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas  
(AIACiMa)

Aquí hay una tabla como la que hiciste hace un rato con una fila para 0 cortes añadida.

Cortes	Papeletas
0	1
1	2
2	4
3	8

Escribe una ecuación para el patrón que muestra la tabla.

Si  $P(n)$  es el número de papeletas luego de  $n$  cortes, tendríamos  $P(n)=2^n$ .

Utiliza tu ecuación y la tabla para encontrar el valor de  $2^0$ .

Por un lado  $1=P(0)$  y por otro lado  $P(0)=2^0$ . Por lo tanto  $2^0=1$ .

¿Cuál crees que debe ser el valor de  $b^0$  para cualquier número positivo  $b$ , como  $3^0$ ,  $6^0$  ó  $25^0$ ? Verifica tu respuesta con la calculadora.

(El problema con base 0 es que  $0^0$  no está definido mientras que una base negativa da pie a que surjan números que no son reales. Por ejemplo,  $(-1)^{1/2}$  no es un número real es un número complejo. Usualmente este número en matemáticas lo denotamos por  $i$ , en ingeniería usualmente lo denotan por  $j$ .)



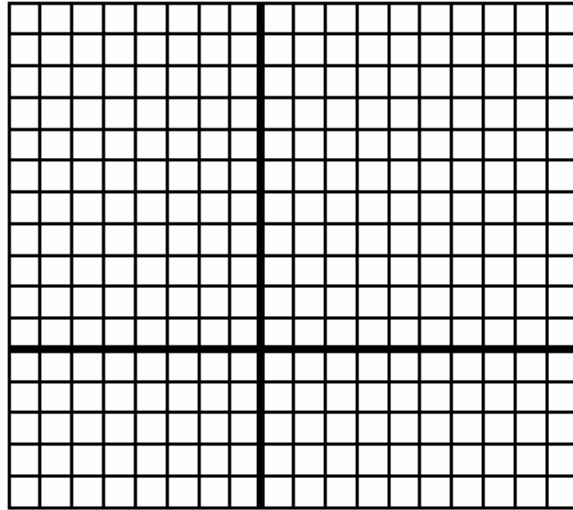
### Reflexión

1. Basado en tu trabajo en esta investigación, ¿cuáles crees que son las propiedades claves de un patrón de crecimiento exponencial? ¿Cómo se diferencia un patrón de crecimiento exponencial de uno lineal?

2. Considera la ecuación exponencial  $y = 2^x$ .

a. ¿Cómo puede calcular el valor de  $y$  para un valor dado de  $x$ ? ¿Cómo calculas el valor de  $y$  para  $x = 2$ ? ¿Para  $x = \frac{1}{2}$ ? ¿Para  $x = -3$ ?

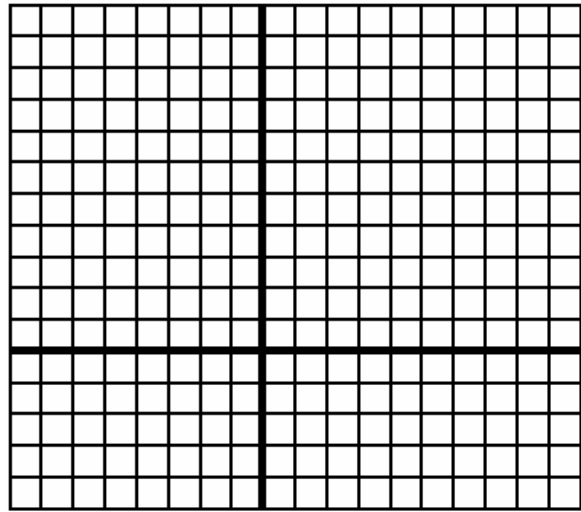
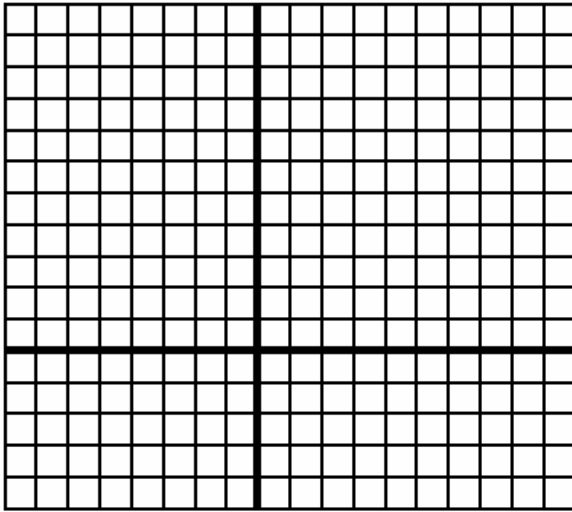
b. Describe la gráfica de  $y = 2^x$ .





3. Considera la ecuación exponencial  $y = 3^x$ .

- ¿Cómo es el método de hallar  $y$  para un valor de  $x$  en  $y = 2^x$  similar al de hallar  $y$  para un valor de  $x$  en  $y = 3^x$ ? ¿En qué se diferencian los métodos?
- ¿Cuán similar es la tabla de valores de  $y = 3^x$  a la tabla de valores de  $y = 2^x$ ? ¿Cómo se diferencian las tablas?
- ¿Cuán similar es la gráfica de  $y = 3^x$  a la gráfica de  $y = 2^x$ ? ¿En qué se diferencian?



Piensa en la respuesta a estas preguntas. Discute tus ideas con tus compañeros y con tu maestro, luego escribe un resumen de tus hallazgos.



**Avalúo:**

Identifica características <b>diferentes</b> entre los siguientes conceptos cuando son demostrados en:		
Características del crecimiento lineal	Demostrados en...	Características del crecimiento exponencial
	... una tabla	
	... una gráfica	
	...ecuaciones	
Identifica características <b>similares</b> entre los siguientes conceptos cuando son demostrados en:		
Ecuaciones en situaciones de crecimiento lineal	Demostrados en...	Ecuaciones en situaciones de crecimiento exponencial
	... una tabla	
	... una gráfica	
	...ecuaciones	





Piensa en las respuestas dadas en la tabla anterior. Discútelas con tus compañeros y con tu maestro, luego escribe un resumen de tus hallazgos.

### **Discusión y Cierre:**

Pídale a sus estudiantes que piensen y contesten las siguientes preguntas:

1. He aprendido lo siguiente acerca de determinar de una tabla, gráfica o ecuación si una relación es exponencial:
2. Estas son las ideas matemáticas que aún me están causando problemas:
3. Pienso que estas ideas me traen dificultad pues:



**Posibles Extensiones:**

Suponte que en la escuela de Alejandro hay 1,000 estudiantes. ¿Cuál es el número mínimo de cortes que habría que hacerle a una papeleta "grande" para poder tener suficientes papeletas para llevar a cabo una votación?

Un paquete de 250 papeles de los que está utilizando Alejandro mide 1 pulgada. ¿Cuán alto será un paquete de papeletas luego de 20 cortes? ¿30 cortes? ¿A cuánto es equivalente este número en millas si 1 milla = 5,280 pies?

¿Cuántos cortes habría que hacer para tener un paquete de papeletas que mida 1 pie de alto? (Observe que aquí tienen que revertir el proceso.)

Pregúnteles qué les fue más fácil, ¿predecir el número de papeletas dado el número de cortes o predecir el número de cortes dado el número de papeletas?



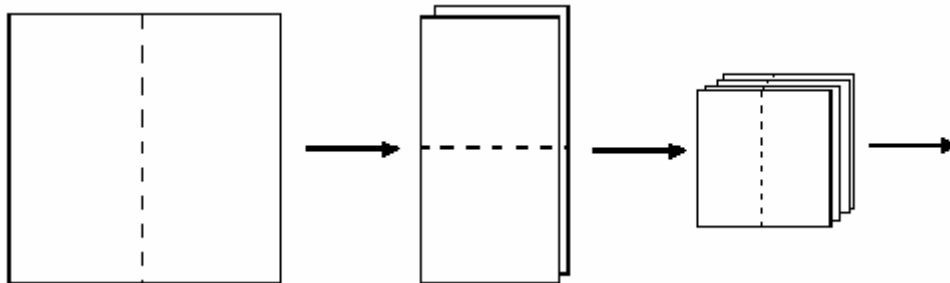
## Haciendo Papeletas 1

Hoja del Estudiante

Nivel 10-12

Actividad de Matemáticas

Alejandro está haciendo papeletas para votar en una elección. Comienza por cortar el pedazo de papel por la mitad, luego pone los dos pedazos uno encima del otro y hace otro corte por la mitad. Toma los pedazos resultantes y los corta por la mitad. Repite el proceso, creando en cada paso papeletas cada vez más y más pequeñas, como se muestra en la figura.



Luego de cada corte, Alejandro cuenta las papeletas y apunta este número en una tabla

Cortes	Papeletas
1	
2	
3	
4	
5	

Alejandro quiere encontrar una manera de poder predecir el número de papeletas que tendrá luego de hacer una serie de cortes.



**Procedimiento:**

Corten un papel, como lo hizo Alejandro, y cuenten las papeletas luego de cada corte. Hagan una tabla para mostrar cuántas papeletas hay luego de un corte, luego de dos cortes, luego de tres cortes y así sucesivamente.

Cortes	Papeletas
1	
2	
3	
4	
5	

¿Observan algún patrón en la manera en que cambia el número de papeletas con cada corte? De ser así, extiendan su tabla hasta los diez cortes.

Cortes	Papeletas
6	
7	
8	
9	
10	

¿Que estrategia utilizaron para llegar a esa conclusión?

¿Cuántas papeletas se tendrían si se hacen 15 cortes? ¿Cuántas si se hacen 30 cortes?

¿Encuentran un patrón multiplicativo en la tabla? Expliquen su razonamiento.



Cuando encuentraste el número de papeletas luego de hacer 10, 20 y 30 cortes, probablemente te encontraste multiplicando largas filas de 2's. En lugar de escribir esas largas filas del mismo factor, puedes utilizar su **forma exponencial**. Por ejemplo, puedes escribir  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$  como  $2^5$ , que se lee "dos a la cinco". En la expresión  $2^5$ , 2 es la **base** y 5 el **exponente**. Cuando evalúas  $2^5$ , te da  $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ . Decimos que 32 es la **forma estándar** de  $2^5$ .

Piensa en el producto  $3 \times 3 \times 3 \times 3$ , ¿cómo lo relacionarías al corte de papeletas?

Escribe cada expresión en su forma exponencial

d.  $2 \times 2 \times 2$

e.  $5 \times 5 \times 5 \times 5$

f.  $1.5 \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5$

Escribe cada expresión en su forma estándar

d.  $2^7$

e.  $3^3$

f.  $4.2^3$



Alianza para el Aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas  
(AIACiMa)

Aquí hay una tabla como la que hiciste hace un rato con una fila para 0 cortes añadida.

Cortes	Papeletas
0	
1	
2	
3	

Escribe una ecuación para el patrón que muestra la tabla.

Utiliza tu ecuación y la tabla para encontrar el valor de  $2^0$ .

¿Cuál crees que debe ser el valor de  $b^0$  para cualquier número positivo  $b$ , como  $3^0$ ,  $6^0$  ó  $25^0$ ? Verifica tu respuesta con la calculadora.



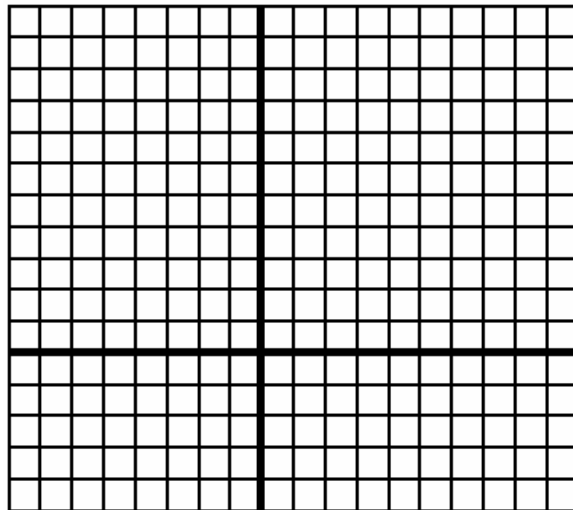
### Reflexión

1. Basado en tu trabajo en esta investigación, ¿cuáles crees que son las propiedades claves de un patrón de crecimiento exponencial? ¿Cómo se diferencia un patrón de crecimiento exponencial de uno lineal?

2. Considera la ecuación exponencial  $y = 2^x$ .

c. ¿Cómo puedes calcular el valor de  $y$  para un valor dado de  $x$ ? ¿Cómo calculas el valor de  $y$  para  $x = 2$ ? ¿Para  $x = \frac{1}{2}$ ? ¿Para  $x = -3$ ?

d. Describe la gráfica de  $y = 2^x$ .



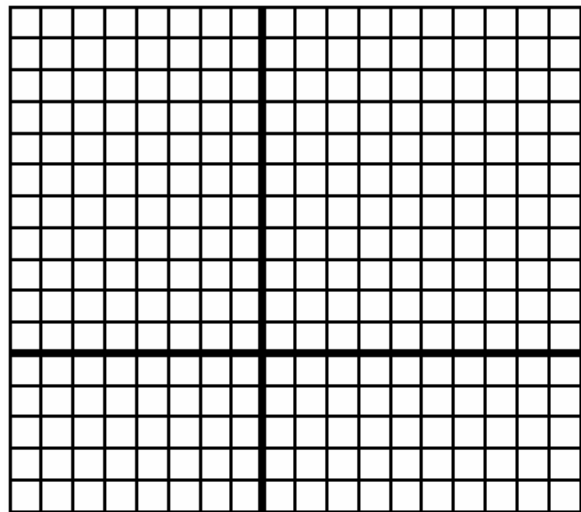
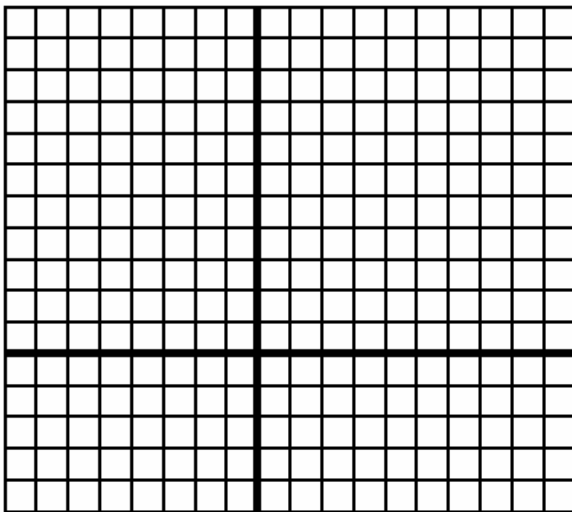


3. Considera la ecuación exponencial  $y = 3^x$ .

d. ¿Cómo es el método de hallar  $y$  para un valor de  $x$  en  $y = 2^x$  similar al de hallar  $y$  para un valor de  $x$  en  $y = 3^x$ ? ¿En qué se diferencian los métodos?

e. ¿Cuán similar es la tabla de valores de  $y = 3^x$  a la tabla de valores de  $y = 2^x$ ? ¿Cómo se diferencian las tablas?

f. ¿Cuán similar es la gráfica de  $y = 3^x$  a la gráfica de  $y = 2^x$ ? ¿En qué se diferencian?



Piensa en la respuesta a estas preguntas. Discute tus ideas con tus compañeros y con tu maestro, luego escribe un resumen de tus hallazgos.





**Discusión y Cierre:**

Piensen en la actividad que acaban de hacer y contesten las siguientes preguntas:

1. He aprendido lo siguiente acerca de determinar de una tabla, gráfica o ecuación si una relación es exponencial:
2. Estas son las ideas matemáticas que aún me están causando problemas:
3. Pienso que estas ideas me traen dificultad pues:

**Avalúo:**

Identifica características <b>diferentes</b> entre los siguientes conceptos cuando son demostrados en:		
Características del crecimiento lineal	Demostrados en...	Características del crecimiento exponencial
	... una tabla	
	... una gráfica	
	...ecuaciones	



Alianza para el Aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas  
(AIACiMa)

Identifica características <b>similares</b> entre los siguientes conceptos cuando son demostrados en:		
Ecuaciones en situaciones de crecimiento lineal	Demostrados en...	Ecuaciones en situaciones de crecimiento exponencial
	... una tabla	
	... una gráfica	
	...ecuaciones	



Alianza para el Aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas  
(AIACiMa)

Piensa en las respuestas dadas en la tabla anterior. Discútelas con tus compañeros y con tu maestro, luego escribe un resumen de tus hallazgos.



**Posibles Extensiones:**

Suponte que en la escuela de Alejandro hay 1,000 estudiantes. ¿Cuál es el número mínimo de cortes que habría que hacerle a una papeleta "grande" para poder tener suficientes papeletas para llevar a cabo una votación?

Un paquete de 250 papeles de los que está utilizando Alejandro mide 1 pulgada. ¿Cuán alto será un paquete de papeletas luego de 20 cortes? ¿30 cortes? ¿A cuánto es equivalente este número en millas si 1 milla = 5,280 pies?

¿Cuántos cortes habría que hacer para tener un paquete de papeletas que mida 1 pie de alto?

¿Qué les fue más fácil predecir el número de papeletas dado el número de cortes o predecir el número de cortes dado el número de papeletas?