Alianza para el Aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas
(AlACiMa)

Introducción a Logaritmos y Exponenciales

Guía del Maestro
Nivel 10-12
Actividad de Matemáticas

Propósito:

Se espera que el estudiante se familiarice con el concepto de los logaritmos y pueda utilizar sus propiedades y sus distintas representaciones, entre ellas la representación exponencial. El propósito principal de esta actividad es que el estudiante comprenda la importancia de las funciones logarítmicas y cómo éstas pueden ayudar a simplificar el análisis en algunos casos.

Estándares:

Manipulación con Logaritmos. Gráficas de funciones exponenciales, logarítmicas y gráficas semilogarítmicas.

Tiempo:

Entre dos y tres periodos de clase.

Materiales:

Papel, lápiz, papel cuadriculado (de 1 cm^2), Calculadora gráfica (opcional).

Preparación:

No se requiere de ninguna preparación previa. Toda la información forma parte de la discusión de la actividad.

Trasfondo:

Se espera que el estudiante haya sido expuesto al concepto de logaritmos y exponenciales.

Inicio (Instrucciones Preliminares):

En álgebra, exponentes enteros y exponentes racionales se definen por

1. $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a \quad (n \quad veces)$
2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
3. $a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$
4. $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$
5. $a^{-p/q} = \dfrac{1}{a^{p/q}}$

Una de las cosas que queremos hacer es definir exponentes irracionales, dándole significado a expresiones como $2^{\sqrt{3}}$ ó 5^{π}.

Sea b una constante positiva y considere la gráfica de la función $f(x) = b^x$, que hasta el momento solo ha sido definida para valores racionales de x.

INSERTAR GRÁFICAS PARA b=1, mayor que 1 y menor que 1

Como f solo está definida para valores racionales tenemos "espacios" vacíos. Nuestro deseo es rellenar estos espacios.

¿Por qué crees que las gráficas son así? ¿Puedes explicarlo en palabras?

Recuerde de álgebra que ***un logaritmo es un exponente***. Si b es un número positivo distinto de 1, entonces $\log_b x$ (el logaritmo con base b de x) representa la potencia a la que hay que elevar a b para obtener x.

Ejemplo. $1. \log_{10} 100 = 2$ pues $10^2 = 100$.

En general, $\boxed{y=\log_b x \Leftrightarrow b^y = x}$. Este es el diccionario para ir de la representación logarítmica a la representación exponencial, y viceversa, de un número real.

De estas representaciones, se puede ver que $f(x)=\log_b x$ y $g(x)=b^x$ son funciones inversas la una de la otra. Si hacemos la composición de las funciones obtenemos $\log_b\left(b^x\right)=x$ y $b^{\log_b x}=x$. Sabiendo que las funciones exponenciales y las logarítmicas son inversas las unas de las otras y habiendo visto las gráficas de las funciones exponenciales, ¿puedes hacer las gráficas de las funciones logarítmicas? ¿Qué habría que hacer?

(Las gráficas son simétricas con respecto a la recta $y=x$*.)*

<u>IMPORTANTE</u>: Para cada base b, $\log_b x$ solo está definido para $x>0$. ¿Sabes por qué?

(Esto es ya que $y=\log_b x$ *es equivalente a* $x=b^y$ *y* $b^y>0$ *para todo valor real de* y*, ya que* b *es positivo.)*

Observe que como $b^0=1$, entonces tenemos que $\boxed{\log_b 1=0}$.

También, si suponemos que $x=\log_b a$ y $y=\log_b c$, entonces $a=b^x$ y $c=b^y$. Así las cosas $ac=b^x b^y=b^{x+y}$. Por lo tanto, $\log_b ac = x+y=\log_b a+\log_b c$. Es decir,

$$\boxed{\log_b ac=\log_b a+\log_b c}$$

De manera similar podemos ver la validez de las siguientes propiedades

$$\boxed{\begin{array}{l}\log_b b=1\\ \log_b\left(\dfrac{a}{c}\right)=\log_b a-\log_b c\\ \log_b\left(a^r\right)=r\log_b a\\ \log_b\left(\dfrac{1}{c}\right)=-\log_b c\end{array}}$$

¿Puedes hacerlo? Trata de "imitar" las demostraciones de arriba.

Los logaritmos están definidos para cualquier base positiva distinta de 1, pero los más utilizados son con base 10, llamado *logaritmo común* y con base $e \approx 2.71828\ldots$, llamado *logaritmo natural*. El logaritmo natural se denota ln (leído "ele-ene"), $\log_e x$ y $\ln x$ denotan el logaritmo natural de x.

La base e es un número irracional, descubierto por el matemático suizo Leonhard Euler quien sugirió su uso como base para logaritmo en uno de sus artículos publicados en 1728.

El número e puede ser aproximado utilizando valores "grandes" para x en la expresión $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Trate algunos a ver qué aproximación obtienen.

El concepto de logaritmo fue descubierto alrededor del 1590 independientemente por John Napier (1150-1617) y Jobst Bürgi (1552-1632). Napier, quien era un lord escocés, tuvo la mayor influencia en el desarrollo del concepto de los logaritmos. Su acercamiento a éstos fue por medio de la relación existente entre sucesiones aritméticas y geométricas y no considerándolos como las funciones inversas de las funciones exponenciales. Frecuentemente los científicos en los tiempos de Napier necesitaban multiplicar o dividir números "grandes". Obviamente, para estos tiempos no había ni calculadoras ni *slide rules*, había que hacer los cómputos a mano. Este trabajo era tedioso y dado a cometer errores. Napier descubrió un mecanismo que permitía calcular productos, cocientes, raíces y potencias con relativa facilidad.

Napier publicó sus tablas de logaritmos en el 1614, luego de 20 años de trabajo. Su importancia para hacer cálculos fue reconocida de inmediato y ya para el 1650 estaban en imprenta hasta en la China. Con este nuevo sistema, el producto de dos números se podía calcular hallando el logaritmo de cada uno de los números en la tabla y sumando los resultados, i.e. log A + log B = log (AB). De esta manera estaba reemplazando el tomar un producto con una suma, un cálculo mucho más sencillo cuando se hace a mano.

Napier no utilizaba ninguna notación particular, escribía todo verbalmente. La notación que usamos hoy día se debe a Leonhard Euler. Algo que podemos decir es que dada la popularidad de las tablas de logaritmos de Napier, él probablemente es el principal responsable del punto decimal que usamos hoy día. Decimos esto puesto que los logaritmos en sus tablas eran números decimales escritos con un punto decimal. Luego de la invención de la calculadora la importancia de los logaritmos como una herramienta para calcular ha disminuido pero su importancia teórica sigue siendo vigente e importante.

Hasta ahora solo han trabajado con polinomios. En específico hemos tenido la experiencia de trabajar con funciones lineales y sus gráficas. Por supuesto, no todas las situaciones pueden ser estudiadas con modelos lineales, pero hay ocasiones en que queremos y se puede "transformar" la variable independiente o la variable dependiente para simplificar el modelo que tenemos bajo consideración o estamos estudiando.

Por ejemplo, si una cantidad y crece a razón r por unidad de tiempo, entonces su valor a tiempo t es $y(t) = y_0 e^{rt}$, un modelo que no es lineal, donde y_0 es la cantidad inicial. Una manera de trabajar con este modelo es tomando el logaritmo natural a ambos lados para obtener $\ln y(t) = \ln y_0 + rt$. Este es un modelo lineal.

Hay muchas otras ocasiones donde podemos transformar la variable dependiente, la variable independiente o ambas para eliminar la "curvatura" de la gráfica y obtener una gráfica lineal.

Considere por ejemplo la siguiente tabla

x	1.0	1.6	2.5	3.0	4.0	4.6	5.0	5.7	6.0	7.0
y	2.5	2.6	2.7	5.0	5.3	9.1	14.8	17.5	23.0	28.0

Si graficamos y vs. x

INSERTAR GRÁFICA

vemos a simple vista que no es lineal la relación entre ellas. Ahora, si graficamos $\ln(x)$ vs. x

INSERTAR GRÁFICA

podemos ver que ahora la relación parece ser lineal.

Al analizar, modelar y tratar de resolver muchas situaciones de la vida diaria nos encontramos, de forma natural, con el concepto de funciones logarítmicas y exponenciales. Estas situaciones muchas veces envuelven y se entrelazan con otras disciplinas, dejando ver la importancia que tienen las matemáticas, no solo por y para las matemáticas sino para otras disciplinas y ramas dentro de las ciencias y la ingeniería.

En una actividad veremos como podemos utilizar los logaritmos para obtener información y poder entender, por medio del modelaje, diferentes situaciones como la intensidad de un terremoto o la intensidad de un sonido. Es importante mencionar que cuando se trata con ecuaciones que envuelven logaritmos usualmente se necesita utilizar las funciones exponenciales para hallar una solución.

¿Qué motivó la “invención” de los logaritmos?

Dadas tus experiencias hasta el momento, ¿cómo compararías una función logarítmica con una polinomial?