Alianza para el Aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas
(AlACiMa)

Modelaje con Logaritmos

Guía del Maestro
Nivel 10-12
Actividad de Matemáticas

Propósito:

Se espera que el estudiante se familiarice con el concepto de los logaritmos y pueda utilizar sus propiedades y sus distintas representaciones, entre ellas la representación exponencial. El propósito principal de esta actividad es que el estudiante comprenda la importancia de las funciones logarítmicas y el por qué surgen de forma natural al intentar modelar las distintas situaciones con las que nos enfrentamos en nuestra vida cotidiana para poder entenderlas mejor.

Estándares:

Manipulación con Logaritmos. Gráficas con ejes SemiLogarítmicas.

Tiempo:

Entre tres y cuatro periodos de clase.

Materiales:

Papel, lápiz, papel cuadriculado (de 1 cm^2), Calculadora gráfica (opcional).

Preparación:

No se requiere de ninguna preparación previa. Toda la información forma parte de la discusión de la actividad.

Trasfondo:

Se espera que el estudiante haya sido expuesto a trabajar con funciones exponenciales y logarítmicas, incluyendo sus gráficas. También esperamos que conozca las propiedades básicas de logaritmos y la relación de estos con las funciones exponenciales.

Adaptado por: Uroyoán R. Walker Ramos de:

Inicio (Instrucciones Preliminares):

Luego de la invención de la calculadora la importancia de los logaritmos como una herramienta para calcular ha disminuido pero su importancia teórica sigue siendo vigente e importante. Al analizar, modelar y tratar de resolver muchas situaciones de la vida diaria nos encontramos, de forma natural, con el concepto de funciones logarítmicas y exponenciales.

Estas situaciones muchas veces envuelven y se entrelazan con otras disciplinas, dejando ver la importancia que tienen las matemáticas, no solo para las matemáticas sino para otras disciplinas y ramas dentro de las ciencias y la ingeniería.

En esta actividad veremos como podemos utilizar los logaritmos para obtener información y poder entender, por medio del modelaje, diferentes situaciones como la intensidad de un terremoto o la intensidad de un sonido. Es importante mencionar que cuando se trata con ecuaciones que envuelven logaritmos usualmente se necesita utilizar las funciones exponenciales para hallar una solución.

Procedimiento:

Los logaritmos muchas veces aparecen cuando se quiere medir una cantidad, pues proveen una manera efectiva de reducir los números positivos que pueden variar desde bien grandes hasta bien pequeños. Por ejemplo, si una cierta cantidad puede asumir valores entre $0.00000000000000000001 = 10^{-20}$ y $100,000,000,000,000,000,000 = 10^{20}$, el logaritmo común de estos números estaría variando entre -20 y 20.

Óptica. Si un panel de cristal elimina el 10% de la luz que pasa a través de el, entonces el por ciento P de luz que pasa a través de n paneles sucesivos está dado aproximadamente por la ecuación $P = 100e^{-0.1n}$.

Química. El pH de una solución química está dado por la fórmula

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro. Los valores de pH fluctúan entre 0 y 14. Se dice que una solución es neutral si tienen un pH de 7 mientras que una solución con un pH menor que 7 se clasifica como un ácido y una solución con un pH mayor de 7 se clasifica como una base.

Ejemplo. a. Una sustancia desconocida tiene una concentración de iones de hidrógeno de 1.47×10^{-4} moles por litro. Determine el pH y clasifique la sustancia como un ácido o una base.
b. Si una solución tiene un pH de 5.4, halle la concentración de iones de hidrógeno de la solución.

Hay un dicho que dice que un matemático es una máquina que transforma café en teoremas. Aún está por verse que si se aumenta la calidad del café, se aumenta la calidad del teorema. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo. La leche tiene una concentración de iones de hidrógeno de 1.6×10^{-7} moles por litro y el café 1.3×10^{-5}. Determine el pH de estas sustancias y clasifíquelas como ácido o base.

Ejercicio. Normalmente, la sangre humana tiene una concentración de iones de hidrógeno de alrededor de 3.98×10^{-8} moles por litro. Determine el pH normal de la sangre humana.

Adaptado por: Uroyoán R. Walker Ramos de:

Satélites en el Espacio. El número de vatios v generado por las baterías de un satélite en órbita luego de d días está dado por la fórmula $v = 50e^{-0.004d}$. ¿En cuántos días tendremos una producción de 37 vatios?

La intensidad del sonido. El sonido es una vibración recibida por el oído y procesada por el cerebro. La intensidad del sonido es una medida de la "fuerza" de la vibración y puede ser medida utilizando logaritmos. Los físicos definen la *intensidad de una onda de sonido* a ser la cantidad de energía que una onda transmite a través de una región.

Por ejemplo, el sonido de menor intensidad que puede detectar un oído humano a una frecuencia de 100 hertz está alrededor de los 10^{-12} W/m^2.

El volumen $V(x)$ es medido en decibeles. La palabra decibel se abrevia dB. El prefijo *deci* significa "décima", i.e. un decibel es un décimo de un bel. La palabra *bel* es en honor a Alexander Graham Bell. El volumen de un sonido de intensidad x, medido en vatios por metro cuadrado, W/m^2, se define por $V(x) = 10\log\left(\frac{x}{I_0}\right)$, donde $I_0 = 10^{-12}$ vatios por metro cuadrado es el sonido de menor intensidad que puede ser detectado por el oído humano.

Para tener una referencia el sonido de una pistola al disparar es de alrededor de 140 decibeles y una conversación normal alrededor de 50 decibeles.

Ejercicio. Si el ruido en una biblioteca mide una intensidad de 10^{-12} vatios por centímetro cuadrado, ¿cuantos decibeles mide el sonido?

La magnitud de un terremoto.

Muchos terremotos son débiles y causan poco o ningún daño. La isla de Puerto Rico fue estremecida por uno de los más severos terremotos de su historia en la mañana del 11 de octubre de 1918. El terremoto comenzó a sentirse en forma repentina a las 10:14A.M. De acuerdo a datos oficiales un total de 116 personas perdieron sus vidas y la pérdida de propiedad fue de cerca de cuatro millones de dólares, cifra cuantiosa para la época. La parte noroeste de la Isla fue la más afectada por el terremoto dada su proximidad al epicentro. Se estima que la magnitud del terremoto alcanzó 7.3 en la escala Richter. Un terremoto 7.3 en la escala Richter se considera un evento de gran magnitud.

La siguiente tabla nos ofrece información acerca de algunos terremotos.

Año	Medida en Escala Richter	Lugar	Año	Medida en Escala Richter	Lugar
1918	7.3	Puerto Rico	1988	6.9	Armenia
1960	9.5	Chile	1999	7.8	Turquía
1985	8.1	México	2001	8.4	Perú

Un *sismógrafo*, derivado de la palabra griega seismos que significa terremoto, es un instrumento que registra la cantidad de movimiento que produce la onda sísmica de un terremoto, el registro se conoce como un sismograma. La amplitud del sismograma es la distancia vertical entre los "picos" y los "valles" producidos por la lectura de la onda sísmica y una recta horizontal si no hay movimiento. Esta distancia es usualmente medida en micrómetros, μm.

Richter quería desarrollar una escala que reflejara solo la intensidad del terremoto. La escala de Richter es una de las maneras de convertir lecturas sismográficas a números que provean una fácil referencia para medir la magnitud M de un terremoto. Richter notó que para cualesquiera dos terremotos, si A_{15} y A_{25}, son las amplitudes de un terremoto medidas a 15 y 25 kilómetros, respectivamente, del epicentro y B_{15} y B_{25} son lecturas del segundo terremoto, entonces

$$\log A_{15} - \log B_{15} = \log A_{25} - \log B_{25}$$

Este patrón continúa no importa la distancia. La única desventaja es que necesitas dos terremotos. Para remediar esto todos los terremotos son comparados con a un terremoto de "nivel-cero" cuya lectura sismográfica mida 0.001 milímetros a una distancia de 100 kilómetros del epicentro, este es el metro contra elk que se miden todos los terremotos. En general, un terremoto que tiene una lectura sismográfica que mida x milímetros tiene magnitud $M(x)$, que está dada por $M(x) = \log\left(\frac{x}{10^{-3}}\right)$.

En sus propias palabras, compare y contraste la escala Richter y la escala de decibles. ¿Por qué son tan parecidas las fórmulas? ¿Por qué piensa que ambas envuelven logaritmos?

Propiedades y concepciones erróneas de las propiedades.

Adaptado por: Uroyoán R. Walker Ramos de:

Concepciones alternas típicas de los estudiantes:

Discusión y Cierre:

Podemos ver como el concepto de las funciones logarítmicas y/o exponenciales surgen de manera natural al tratar de entender fenómenos naturales.

Rúbrica:

Avalúo:
No recordaba….
Ahora puedo explicar….
Todavía tengo dificultad entendiendo…
Todavía no entiendo…

Posibles Extensiones:

Se podría continuar presentando ejemplos de Crecimiento y/o Decrecimiento Exponencial de Bacterias o algún material Radioactivo. También se podría utilizar una escala logarítmica para linealizar data cuando estamos graficando una función exponencial.

Referencias:

Mathematics: A Practical Odyssey, Johnson/Mowry, Thomson, 5th edition

Precalculus for Engineers, Martínez/Moore/Rojas/Wayland

Red Sísmica de Puerto Rico, UPR-RUM http://rmsismo.upr.clu.edu