



## Alianza para el Aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas (AIACiMa)

### ¿Hace diferencia lo que sabes y lo que no sabes?

Guía del Maestro  
4<sup>to</sup> - 6<sup>to</sup>

#### Actividad de Matemáticas

#### Propósito:

Esta lección compara los efectos de saber el contenido de una muestra no reemplazando y de no saber el contenido de una muestra no reemplazando en predecir el color de la próxima loseta que se saca de una bolsa de papel. La actividad envuelve a los estudiantes en el proceso de tomar muestras y analizar datos. Además les presenta oportunidades de profundizar su entendimiento de probabilidad y de pensar proporcionalmente.

II.6. Incluye conceptos fundamentales de la disciplina

#### Estándares:

##### Análisis de Datos y Probabilidad

- ◆ Proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en datos recopilados.
- ◆ Utilizar términos como seguro, posible, probable, improbable e imposible, para describir la posibilidad de que un evento ocurra.
- ◆ Predecir el resultado de experimentos simples y comprobar predicciones.
- ◆ Determinar la probabilidad teórica de que un evento ocurra.

##### Comunicación:

- ◆ Comunicar pensamientos matemáticos de manera coherente y clara, oralmente y por escrito.
- ◆ Analizar y evaluar pensamientos matemáticos y las estrategias utilizadas por otros.

#### Trasfondo:

II. 7. Se promueve un entendimiento conceptual haciendo conexión entre conceptos ya aprendidos

Es importante haber hecho y discutido la actividad de muestreo con reemplazo ¡Adivina cuántas hay! antes de comenzar esta extensión. Un repaso breve de esa actividad, de cómo hacer muestreos con reemplazo y qué quiere decir la probabilidad de un evento simple sería apropiado. Otras experiencias

previas donde se utilizaron proporciones para describir la probabilidad teórica o la probabilidad experimental de eventos simples serían útiles.

### Tiempo:

2 períodos de clase

### Materiales:

1. bolsas de papel de estraza
2. losetas de color azul y losetas de color rojo
3. liguillas grandes, para cerrar las bolsas
4. una bolsa de papel de estraza rotulada A??? que contenga 7 losetas rojas y 3 losetas azules cada una (esta es para el maestro iniciar la actividad.)
5. una bolsa de papel de estraza vacía rotulada S1 (esta es para el inicio de la actividad.)
6. tres bolsas de papel de estraza rotuladas A3, A0 y A1 que contengan 7 losetas rojas y 3 losetas azules cada una (estas también son para el inicio de la actividad.)
7. para cada grupo de estudiantes, una bolsa de papel de estraza que contenga 7 losetas rojas y 3 losetas azules.

### Preparación:

1. Prepare las bolsas con las cantidades de losetas para el maestro iniciar la actividad y para la investigación de los estudiantes.
2. Divida los estudiantes en grupos de 3 ó 4.
3. Haga suficientes copias de la hoja del estudiante para esta actividad.

### Procedimiento:

#### A. Iniciación de la actividad

1. Muestre la bolsa de papel estraza rotulada A???. Indíquelo a los estudiantes que se han colocado 10 losetas dentro de la bolsa y que 7 losetas son rojas y 3 losetas son azul. Saque una (1) loseta al azar de la

bolsa A??? y esconda la loseta en la bolsa S1 sin permitir a los estudiantes ver el color de ninguna de las losetas. Solamente dígales que sacó 1 loseta.

2. Pregúnteles: de sacar otra loseta de la bolsa rotulada A???, ¿cuál es la probabilidad de que la loseta salga roja? (Posiblemente algunos protestarán y dirán que no pueden decir sin saber cuál loseta sacó, pero hay que insistir en que digan la probabilidad sin tener esa información.) Anote todas las respuestas sugeridas por ellos. Luego de anotar varias ideas, pídale que consideren si al no saber cuál loseta se sacó hace alguna diferencia en la probabilidad. Básicamente harán dos tipos de respuesta:

probabilidad n de 9                      y                      probabilidad n de 10

(En el primer caso, están enfocados en las 9 losetas que quedan en la bolsa A???. En el segundo caso están considerando las 10 losetas en las dos bolsas. Uno de los puntos principales de la actividad es contrastar estos dos puntos de vista.)

I.1 Las estrategias instruccionales y las actividades toman en consideración el conocimiento previo y las preconcepciones inherentes a ellos.  
I.3. La exploración de los conocimientos de los estudiantes ocurre antes de la presentación formal de la actividad.

Nota: Algunos estudiantes pueden sugerir probabilidades en fracciones reducidas como 1 de 2 en lugar de 5 de 10. En esos casos es especialmente importante pedir que expliquen cómo están pensando - puede ser que estén pensando en algo como rojo es 1 color de los 2 colores - **también es importante recibir sus explicaciones sin emitir juicio, pero con suficientes preguntas como para que se aclare cómo están pensando.** Otros pueden responder en términos imprecisos tales como 'muy probable' o 'probable'. Hay que volver a solicitar una probabilidad numérica.

III.21 Se promueve y se valoriza la participación activa de los estudiantes.

3. Muestre la bolsa de papel estraza rotulada A3. Indíquelo a los estudiantes que hay 10 losetas dentro de la bolsa y 7 de esas losetas son rojas y 3 son azules, igual que la bolsa anterior. Esta vez saque las tres (3) losetas azules de la bolsa A3 y coloca la loseta al frente de la bolsa donde todos los estudiantes las puedan ver. Ahora dígales que ha sacado 3 losetas azules.
4. Pregúnteles: de sacar otra loseta de la bolsa rotulada A3, ¿cuál es la probabilidad de que la loseta salga roja? (Se espera que todos digan que es absolutamente seguro que la próxima loseta salga roja, pero pregunte a alguno que parezca que tenga dudas - **¿cuántas losetas rojas y cuántas losetas azules quedan en la bolsa? - esa aritmética sencilla no es automática para todos.**) Una vez que todos se han convencido de que la próxima loseta

tiene que ser roja, saque una loseta y pida que alguien explique cómo podía estar seguro de que iba salir roja.

II.12 Los estudiantes hacen predicciones, estimaciones y/o hipótesis y diseñan medios para probarlas.

Nota: Hay que aprovechar esta oportunidad para decir que la probabilidad numérica corresponde a 'seguro'. Si ninguno de los estudiantes ha mencionado probabilidad numérica, solicite una probabilidad numérica. Puede ser que uno u otro diga probabilidad 1, pero la mayoría entenderán la proporción 7 de 7. Una vez que algún estudiante explique bien qué significa 7 de 7, hay que pedirles que expliquen cómo se expresa esa proporción en forma (de fracción) reducida. Cuando todos han logrado expresar de su propia manera que la probabilidad 1 corresponde a un evento 'seguro', pregúnteles ¿cuál es la probabilidad de sacar una loseta azul? Esta vez llévelos a decir que la probabilidad 0 corresponde a un evento 'imposible'. Buscando que entiendan que todas las probabilidades corresponden a números (no solamente fracciones) entre 0 y 1, pregúnteles ¿cuál es el número mayor que puede representar la probabilidad de algún evento? Pida explicaciones y luego pregunte ¿cuál es el número menor que puede representar la probabilidad de algún evento? Pida que le expliquen nuevamente y luego de que todos han entendido, pregunte si alguien tiene alguna conjetura con respecto a los números que pueden representar probabilidades de eventos.

III.25 La metáfora "maestro como oyente" caracteriza este salón de clase.

5. Muestre la bolsa de papel estraza rotulada A0. Indíquelo a los estudiantes que hay 10 losetas dentro de la bolsa, 7 de esas losetas son rojas y 3 son azules igual que en las bolsas anteriores. Esta vez saca 1 loseta azul de la bolsa A0 y colócala frente a la bolsa donde todos los estudiantes la puedan ver. Ahora dígalos que ha sacado una (1) loseta azul.
6. Pregúnteles: de sacar otra loseta de la bolsa rotulada A0, ¿cuál es la probabilidad de que la loseta salga roja? Anote todas las respuestas sugeridas por ellos. Luego de anotar varias ideas, pídale que consideren si al no saber cual loseta se sacó hace alguna diferencia en la probabilidad. Otra vez harán dos tipos de respuesta:

probabilidad n de 9                      y                      probabilidad n de 10

(En el primer caso están enfocados en las 9 losetas que quedan en la bolsa A3. En el segundo caso es probable que estén considerando las 10 losetas

incluyendo la que está a la vista. Pregunte a los que digan algo de 10, ¿dónde están las 10 losetas? Si incluyen la loseta al frente de la bolsa, pregúnteles si se puede sacar esa de la bolsa ahora.)

7. Ahora muestre la bolsa rotulada A1. Indíquelo a los estudiantes que hay 10 losetas dentro de la bolsa, 7 de esas losetas son rojas y 3 son azules igual que en las bolsas anteriores. Esta vez saca 1 loseta roja de la bolsa A1 y colócala frente a la bolsa donde todos los estudiantes la puedan ver. Ahora dígalos que ha sacado una (1) loseta roja.
8. Pregúnteles: de sacar otra loseta de la bolsa rotulada A1, ¿cuál es la probabilidad de que la loseta salga roja? Anote todas las respuestas sugeridas por ellos. Luego de anotar varias ideas, pídale otra vez si el saber o no saber cuál loseta se sacó hace alguna diferencia en la probabilidad. Otra vez darán dos tipos de respuesta:

probabilidad n de 9      y      probabilidad n de 10

(En el primer caso están enfocados en las 9 losetas que quedan en la bolsa A1. En el segundo caso están todavía considerando las 10 losetas incluyendo la que está a la vista. Hay que volver a preguntar a los que digan algo de 10 que expliquen dónde están las 10 losetas. Dándoles una oportunidad de revisar, se espera que se den cuenta de que no pueden sacar la loseta al frente de la bolsa A1 ahora.)

Nota: Algunos estudiantes pueden sugerir probabilidades en fracciones reducidas como 2 de 3 en lugar de 6 de 9. Otra vez, es importante pedirles que expliquen cómo están pensando y cómo llegaron a esa proporción - **también es importante recibir sus explicaciones sin emitir juicio, pero con suficientes preguntas como para que se aclare cómo están pensando y con oportunidad amplia para revisar su pensamiento - en esto los comentarios de otros estudiantes pueden ser muy valiosos.** Si todavía algunos quieren responder en términos imprecisos tales como 'muy probable' o 'probable', eso señala que tienen mucha inseguridad en manejar probabilidad numérica.

IV. 26 Contestan preguntas o realizan tareas usando diferentes medios donde muestran tanto el conocimiento previo como entendimiento que van desarrollando durante el taller.

9. Pregúnteles a los estudiantes si hace una diferencia en términos de las probabilidades del color de la cuarta loseta, si saben ó no saben el color de la primera loseta. Deben haberse dado cuenta que sí hace diferencia por todo lo anterior. Sin saber el color de la primera loseta, hay 7 losetas rojas en las 10 losetas. Al saber el color de la primera loseta, la probabilidad

depende de los colores de las nueve (9) que quedan en la bolsa. Escriba la primera columna por completo en la pizarra y el encabezamiento de la segunda columna. Permita los estudiantes completar los detalles de la segunda columna:

1 loseta removida	Probabilidad de que la próxima salga roja
sacar 1 azul	7 de 9 son rojas o probabilidad $7/9$
sacar 1 roja	6 de 9 son rojas o probabilidad $6/9 = 2/3$
sacar 1 sin ver el color	7 de 10 son rojas o probabilidad $7/10$

10. La interrogante clave para motivar la parte estudiantil de la actividad: Si el último caso de cierto modo 'incluye' los primeros dos casos, ¿cuál es la relación entre las probabilidades anteriores? Para ser efectivas las probabilidades y los números tienen que ser consistentes con lo que representan y entre ellos mismos. La probabilidad  $7/10$  no es la suma ni el promedio (por lo menos en el sentido usual) de las otras probabilidades. ¿Cómo se puede explicar esto? - Además de capturar el interés de los estudiantes, es importante hacer esta pregunta y retar sus 'explicaciones' aplicando esas explicaciones cuando se puede y preguntando cómo se puede aplicarlas cuando no se puede.
11. Explíqueles a los estudiantes que harán un experimento para recopilar información que les ayudará ver la relación entre las probabilidades anteriores. Devuelve todas las losetas a las bolsas. Pida a un estudiante que retira una loseta de la bolsa A??? y anote el color de esa loseta al principio de una columna en la pizarra (encabezamiento de 'Primera Azul' ó 'Primera Roja'). Debajo del encabezamiento escribe 'Segunda Roja' y 'Segunda Azul'. Luego pida a otro estudiante que retire otra sola loseta de esa misma bolsa y anota un contador al lado de ese color en la pizarra.
12. Devuelve las 2 losetas a la bolsa y repita el anterior 5 ó 6 veces más.
13. Pregunte a los estudiantes cómo pueden organizar la información de las muchas repeticiones de este experimento. (Se espera que se les ocurra utilizar las dos posibilidades distintas para el color de la primera loseta como encabezamiento, pero se pueden olvidar del caso cuando no saben el color de la primera loseta. Si nadie lo sugiere, pregunte como relacionarán estos casos de saber los colores con el caso de no saber los colores. Es muy probable que sugieren hacer otro experimento, pero busque que encuentren una forma de utilizar los mismos datos para los dos casos. No es un paso automático para ellos ver que juntar los dos casos de saber los colores e

ignorar los colores es equivalente a no saber los colores - hay que darles tiempo para pensar. Hay que llegar a un tercer encabezamiento en la pizarra 'Todos', pero sin prisa. )

II.13 Los estudiantes están activamente involucrados en actividades que provocan el pensamiento que a menudo involucran la evaluación crítica de procedimientos.

## B. Experimentación de los estudiantes

1. Pídale a los alumnos que se organicen en los grupos asignados.
2. Reparta a cada grupo una bolsa que contenga 3 losetas azules y 7 losetas rojas.
3. Reparta una 'hoja del estudiante' a cada miembro del grupo.
4. Siguiendo las instrucciones en su hoja, cada grupo tomará doce (12) muestras de su bolsa, anotarán los resultados de cada muestra.
5. Una vez hayan recogido sus resultados devolverán las bolsas al escritorio del maestro o a algún otro lugar que usted designe.
6. Un miembro del grupo apuntará los resultados de su grupo en la pizarra.
7. Los grupos discutirán como explicar la relación entre las probabilidades de los casos de saber el color de la loseta removida y el caso de no saber el color de la loseta removida.
8. Cada uno escribirá su explicación en el espacio provisto en su hoja. Debe haber discusión en el grupo, pero cada estudiante hará sus propias explicaciones. No tiene que haber consenso de grupo.
9. Una vez todos hayan finalizado, usted puede recoger las hojas de trabajo de los alumnos para su evaluación.
10. Cuando terminen todos los grupos, anote los totales de cada columna. Pida a los estudiantes que revisan sus explicaciones para ver si tienen sentido a la luz de los totales.
11. Finalmente, hay que discutir las diferentes explicaciones de las relaciones entre las probabilidades. (A menos que sea una clase muy avanzada no se espera que entren en fórmulas de probabilidad condicional. Sí se espera que se den cuenta que las distintas posibilidades del color de la primera loseta ocurren con distintas frecuencias. De hecho les pueden preguntar cuál es la probabilidad de que la primera loseta sale roja y la probabilidad de que salga azul. Deben haberse dado cuenta, antes de comenzar el experimento, que el color de la primera loseta afecta la probabilidad de que la segunda

loseta salga roja. Ahora, de ver que los colores de la primera loseta (los encabezamientos) ocurren con distintas frecuencias, se espera que conecten estas frecuencias con las probabilidades discutidas. Cuando alguien menciona las diferencias en las cantidades (no antes) pregunta si esas diferencias de frecuencia dicen algo de las probabilidades del color de la primera loseta. Cuando tienen todos los datos en la pizarra les pueden preguntar por qué resulta más frecuente (más veces) que la primera loseta sale roja. Aunque no den explicación numérica deben poder decir que son menos losetas azules para escoger que losetas rojas. Con paciencia y buenas preguntas pueden llegar a decir que el número de veces que el color de la segunda loseta salga roja cuando no se sabe el color de la primera loseta es el 'total' de las veces que salga la segunda roja con la primera azul y la segunda roja con la primera roja. Una parte valiosa de la actividad es la experiencia de examinar posibilidades con claramente distintas probabilidades. )

#### Referencias:

<http://www.uen.org/Lessonplan/preview.cgi?LPid=6180>

<http://www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/>

## Actividad de Matemática:

### ¿Hace diferencia lo que sabes y lo que no sabes?

Hoja del Estudiante

4<sup>to</sup> - 6<sup>to</sup>

NOMBRE: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

#### I. Instrucciones para el experimento:

1. Tu maestro te entregará una bolsa de papel de estraza que contienen losetas plásticas pequeñas de dos colores: rojo y azul.
2. Saque tres (3) losetas de la bolsa, SIN MIRAR. Identifica la columna en la tabla que corresponde a los colores de esas tres (3) losetas.

	3 losetas rojas	2 losetas rojas y 1 loseta azul	2 losetas rojas y 1 loseta azul	3 losetas azules
cuarta loseta ROJA				
cuarta loseta AZUL				

3. Saque una cuarta loseta de la bolsa, SIN MIRAR, y haga una marca en la fila correspondiente al color de esa loseta y la columna identificada en el paso anterior.
4. Devuelve todas las losetas a la bolsa y repita las instrucciones 2 y 3, 11 veces más.
5. Cuente el total de marcas al lado de cada color en la tabla anterior y escriba ese total en la tabla siguiente. Por ejemplo:
6. Devuelva las bolsas de losetas a su maestro, SIN ABRIR.
7. Elige un miembro para anotar los datos de tu grupo en la pizarra.
8. Conteste las preguntas de la parte II.

	Total
cuarta loseta ROJA	 7
cuarta loseta AZUL	 5

## II. Preguntas de Reflexión

1. Habrán notado en el experimento que algunas combinaciones de colores de las primeras 3 losetas ocurrieron con mayor frecuencia que otras. Puede ser que no tuvieron ningún caso en que salieron todas las 3 losetas azules, pero tuvieron muchos casos en que salieron 2 de las 3 losetas rojas. ¿Por qué sucedió eso?
2. Imagina que tu grupo repitió el mismo experimento 1200 veces y resultó que las primeras 3 losetas salieron todas rojas 350 veces, exactamente 2 de las primeras 3 losetas salieron rojas 630 veces, exactamente 1 de las primeras 3 losetas salio 210 veces y ninguna de las primeras 3 losetas salio roja en solamente 10 de los casos. Dado esos números anota en la tabla siguiente cuántas veces se espera que la cuarta loseta salio roja y cuántas veces salio azul.

	350 veces 3 losetas rojas	630 veces 2 losetas rojas y 1 loseta azul	210 veces 2 losetas rojas y 1 loseta azul	10 veces 3 losetas azules
cuarta loseta ROJA				
cuarta loseta AZUL				

3. Imagina otra vez que tu grupo repitió el experimento 1200 veces, pero esta vez que nadie presto atención a los colores de las primeras 3 losetas. Ahora anota en la tabla a la derecha cuántas veces se espera que la cuarta loseta salio roja y cuántas veces salio azul.

	1200 veces
cuarta loseta ROJA	
cuarta loseta AZUL	

4. ¿Qué relación hay entre los números en la primera tabla y en la segunda tabla?



## Actividad de Matemática:

### ¿Hace diferencia lo que sabes y lo que no sabes?

Hoja del Estudiante

4<sup>to</sup> - 6<sup>to</sup>

NOMBRE: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

#### III. Instrucciones para el experimento:

9. Tu maestro te entregará una bolsa de papel de estraza que contienen losetas plásticas pequeñas de dos colores: rojo y azul.
10. Saque tres (3) losetas de la bolsa, SIN MIRAR. Identifica la columna en la tabla que corresponde a los colores de esas tres (3) losetas.

	3 losetas rojas	2 losetas rojas y 1 loseta azul	2 losetas rojas y 1 loseta azul	3 losetas azules
cuarta loseta ROJA				
cuarta loseta AZUL				

11. Saque una cuarta loseta de la bolsa, SIN MIRAR, y haga una marca en la fila correspondiente al color de esa loseta y la columna identificada en el paso anterior.

12. Devuelve todas las losetas a la bolsa y repita las instrucciones 2 y 3, 11 veces más.

13. Cuente el total de marcas al lado de cada color en la tabla anterior y escriba ese total en la tabla siguiente. Por ejemplo:

	Total
cuarta loseta ROJA	 7
cuarta loseta AZUL	 5

14. Devuelva las bolsas de losetas a su maestro, SIN ABRIR.

15. Elige un miembro para anotar los datos de tu grupo en la pizarra.

16. Conteste las preguntas de la parte II.

#### IV.Preguntas de Reflexión

7. En la tabla siguiente escribe las probabilidades experimentales de tu grupo que la cuarta loseta resulta roja y la probabilidad de que la cuarta loseta resulta azul en la columna correspondiente a los colores de las primeras tres losetas.

Experimental	3 losetas rojas	2 losetas rojas y 1 loseta azul	2 losetas rojas y 1 loseta azul	3 losetas azules
probabilidad de cuarta loseta ROJA				
probabilidad de cuarta loseta AZUL				

8. Suponga que hay 12 losetas en una bolsa de las cuales 3 son azules y 9 son rojas y se saca 3 losetas de esa bolsa. En la tabla siguiente, escribe la probabilidad teórica de que la cuarta loseta resulta roja y la probabilidad teórica de que la cuarta loseta resulta azul en la columna correspondiente a los colores de las primeras tres losetas.

Teórica	3 losetas rojas	2 losetas rojas y 1 loseta azul	2 losetas rojas y 1 loseta azul	3 losetas azules
probabilidad de cuarta loseta ROJA				
probabilidad de cuarta loseta AZUL				

9. Compara las probabilidades experimentales con las probabilidades teóricas en las tablas anteriores.

10. Explica las diferencias entre las probabilidades experimentales y las probabilidades teóricas.

11. ¿Qué se puede hacer para obtener probabilidades experimentales más cercanas a las probabilidades teóricas?

12. En la tabla a la derecha escribe las probabilidades experimentales de tu grupo que la cuarta loseta resulta roja y la probabilidad de que la cuarta loseta resulta azul sin tomar en cuenta los colores de las primeras tres losetas.

Experimental	Todo Caso
cuarta loseta ROJA	
cuarta loseta AZUL	

13. Explica la relación hay entre las probabilidades de la tabla en #1 y las probabilidades de la tabla anterior.

14. Suponga que hay 12 losetas en una bolsa de las cuales 3 son azules y 9 son rojas y se saca 3 losetas de esa bolsa. En la tabla a la derecha, escribe la probabilidad teórica de que la cuarta loseta resulta roja y la probabilidad teórica de que la cuarta loseta resulta azul sin tomar en cuenta los colores de las primeras tres losetas.

Teórica	Todo Caso
cuarta loseta ROJA	
cuarta loseta AZUL	

15. Explica la relación hay entre las probabilidades de la tabla en #2 y las probabilidades de la tabla anterior.

