INTRODUCCIÓN

El hombre ha desarrollado, entre las varias ciencias del conocimiento, la matemática para modelar y explicar el mundo que le rodea. De los diferentes componentes de matemática, la Geometría permite representar el espacio y los objetos que en él existen. A través de los años, se han desarrollado diferentes ramas de la Geometría para estudiar propiedades particulares de los objetos en cuanto a su forma y tamaño, las relaciones que se establecen entre ellos y aún, la propia naturaleza del espacio.

En la actualidad, los avances tecnológicos han dado un fuerte impulso al desarrollo de nuevas áreas de la matemática, la geometría de fractales es una de ellas. De esta manera se mantiene vigente la importancia de la enseñanza de Geometría en los currículos de estudio.

En las actividades que se presentan se estudiarán algunos aspectos de la Geometría Tridimensional Clásica y la Geometría Moderna con el objetivo de que cuando sea presentada al estudiante le resulte más interesante y le motive a su estudio.

En esta sección, algunas actividades dependen bastante de lo que los estudiantes observen, elaboren, analicen, construyan, fundamenten, y de la habilidad del maestro para inquirir, provocar y fomentar la discusión y el análisis en la sala de clases.

Creando un ambiente apropiado para desarrollar razonamiento geométrico

INTRODUCCIÓN

¿Por qué geometría?

Se espera que los participantes reaccionen brevemente. La discusión debe ser enfocada hacia la importancia de la enseñanza de geometría en el desarrollo de las destrezas de pensamiento.

ACTIVIDAD ***CONSTRUCCIONES CON "PATTY PAPER"***

Objetivo: **Hacer construcciones, usando papel encerado, que ayuden a desarrollar varios conceptos geométricos, como: rectas perpendiculares, mediatriz, bisectriz.**

Materiales: **papel encerado ("patty paper")**

1. Perpendicular a una recta desde un punto fuera

INSTRUCCIONES

Marca o dibuja una recta ***l*** sobre un pedazo de papel encerado. Marca un punto fuera de la recta. Dobla el papel de tal forma que la línea de doblaje pase por el punto y parte de la recta coincida con el resto. Use, como medida de referencia, la esquina de un papel para medir el ángulo formado por la línea de doblaje y la recta *l*. El estudiante debe concluir que los ángulos formados miden 90°. Luego, hacer referencia a la línea de doblaje como la recta perpendicular a la recta *l*. El estudiante construirá la definición de ***rectas perpendiculares***.

2. ***Construcción de la bisectriz de un segmento***

INSTRUCCIONES

Dibuja un segmento sobre un pedazo de papel encerado. Dobla el papel hasta unir los dos extremos del segmento.

OBSERVACIÓN

La línea de doblaje divide al segmento en dos segmentos con la misma medida, o sea, dos ***segmentos congruentes***.

COMENTARIO

El punto de intersección entre el segmento y la línea del doblaje se conoce con el nombre de ***punto medio*** del segmento. El estudiante construye la definición de punto medio de un segmento. Cualquier recta que pase por ese punto medio (se dibujan algunas rectas pasando por el punto medio) se conoce con el nombre de ***bisectriz del segmento***. El estudiante construye la definición de bisectriz de un segmento. Ahora, marca bien la línea de doblaje y mide los ángulos formados. Observa que la medida de los ángulos es de 90°. Aquí se lleva al estudiante a descubrir la relación entre el segmento y la línea de doblaje.

OBSERVACIÓN

La línea de doblaje biseca al segmento y a la misma vez es perpendicular con éste. "Cuando una línea recta biseca un segmento y a la vez es perpendicular con éste se dice que la recta es mediatriz del segmento." El estudiante construye la definición de ***mediatriz***.

3. ***Construcción de la bisectriz de un ángulo***

En un pedazo de papel encerado, marca un ángulo. Mediante doblaje, hacer coincidir los dos rayos o lados del ángulo. Mida los dos ángulos formados. Ambos tienen la misma medida. Hacer referencia a la línea de doblaje como la bisectriz del ángulo. El estudiante construirá la definición de ***bisectriz de un ángulo.***

4. Las bisectrices de los ángulos de un triángulo

a. Dibuje un triángulo en un pedazo de papel encerado. Marque las bisectrices de cada ángulo doblando el papel por cada vértice (aplicación de la construcción 3).

OBSERVACIÓN
Las bisectrices concurren o se encuentran en un punto.

COMENTARIO
El punto donde concurren las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo se conoce como el ***incentro*** del triángulo.

b. Solicite que mediante un doblaje marquen un segmento perpendicular desde el incentro hasta uno de los lados del triángulo. Ahora, con un compás, haciendo centro en el incentro del triángulo, abra el mismo hasta el extremo del segmento perpendicular y trace un círculo. El estudiante debe observar que cada lado del triángulo tiene un punto en común con la circunferencia (***punto de tangencia***).

COMENTARIO
El círculo trazado está inscrito en el triángulo. El estudiante construye la definición de ***círculo inscrito en un triángulo***.

RECOMENDACIÓN
Llevar al estudiante a determinar que el radio del círculo es perpendicular a la tangente, al mismo, en su punto de tangencia.

5. Construcción de las mediatrices de los lados de un triángulo

Trace un triángulo en un pedazo de papel encerado. Mediante doblaje, forme las tres mediatrices de los lados del triángulo.

OBSERVACIÓN
Las tres mediatrices concurren en un punto.

COMENTARIO

El punto de concurrencia de las mediatrices de un triángulo se conoce como ***circuncentro***. El estudiante debe observar que el circuncentro de un triángulo equidista de los vértices del triángulo. O sea, que utilizando un compás y haciendo centro en el circuncentro se puede inscribir el triángulo en un círculo. Es decir, el círculo estará circunscrito al triángulo. Por lo que se puede deducir, que *"por tres puntos cualesquiera no alineados en un plano pasará un y solo un círculo que los contiene".*

Introducción a la Geometría Deductiva

Características de una buena definición

- Usar palabras comúnmente comprendidas, definidas anteriormente o términos indefinidos.
- Describir con exactitud la idea u objeto que está siendo definido

Ejemplo:

El **punto medio** de un segmento AB es el punto **M** en el $\overline{AB}$ de manera que AM = MB.
Si **M** es el punto medio del $\overline{AB}$, entonces **M** está en el segmento AB, y AM = MB.
Si **M** está en el segmento AB y AM = MB, entonces **M** es el punto medio del $\overline{AB}$.

Contraejemplo

Ejemplo que pone en evidencia la falsedad de una generalización.

Uso del contraejemplo: Si **C** está entre **A** y **B**, entonces **AC** < **BC**.

Términos indefinidos	Conceptos básicos y sencillos que no se definen.
Definiciones	Descripción y explicación del significado de objetos e ideas geométricas.
Postulados	Enunciados básicos que aceptamos sin comprobarlos.
Teoremas	Generalizaciones que pueden probarse como verdaderas a través de definiciones, postulados y el razonamiento deductivo.

Razonamiento inductivo Se emplea para descubrir generalizaciones sobre figuras o ideas. Se observa que una propiedad es verdadera para cada caso que se verifica. Dado que la propiedad es verdadera en todos los casos verificados, se concluye que es verdadera para todos los demás casos y se establece una generalización.

Razonamiento deductivo Método para comprobar que las generalizaciones descubiertas son verdaderas para todos los casos.

- Paso 1: Empiece con las condiciones dadas (la hipótesis)
- Paso 2: Use la lógica, definiciones, postulados o teoremas previamente probados para justificar una serie de proposiciones o pasos que den el resultado deseado.
- Paso 3: Afirma el resultado (la conclusión)

Una **proposición** es una aseveración que puede ser verdadera o falsa.

Proposición "Si-entonces"

- Es una proposición de la forma "si p, entonces q", donde p y q son proposiciones simples. A p se le llama hipótesis (o antecedente) y q es la conclusión (o consecuente).

- El símbolo $p \rightarrow q$ (lee "p implica q") se usa para representar la proposición "si-entonces". Si un triángulo tiene lados de longitudes 3, 4 y 5, entonces es un triángulo rectángulo y tiene un ángulo recto opuesto al lado de mayor longitud.

- Si la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado del tercer lado, entonces el triángulo es rectángulo y tiene un ángulo recto opuesto al lado de mayor longitud.

Una proposición "si-entonces" es falsa sólo cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa.

$p \rightarrow q$ (proposición)	Si una bandera es la bandera de PR, entonces ésta tiene una sola estrella.
$q \rightarrow p$ (recíproca)	Si una bandera tiene una sola estrella, entonces ésta es la bandera de PR
$p \rightarrow q$ (proposición)	Si una bandera es la bandera de PR, entonces ésta tiene una sola estrella.
$\neg p \rightarrow \neg q$ (inversa)	Si una bandera no es la bandera de PR, entonces ésta no tiene una sola estrella.
$p \rightarrow q$ (proposición)	Si una bandera es la bandera de PR, entonces ésta tiene una sola estrella.
$\neg q \rightarrow \neg p$ (contrarecíproco)	Si una bandera no tiene una sola estrella, entonces no es la bandera de PR

Una demostración de la proposición "si-entonces"

Sucesión de conclusiones justificadas que nos llevan del antecedente al consecuente de la proposición.

El entendimiento de la lógica nos permite

- Pensar claramente
- Argumentar de forma más convincente
- Desarrollar patrones de pensamiento que nos ayudan a tomar decisiones
- Detectar falacias

Esquemas de razonamiento

- La afirmación de la hipótesis (***Modus Ponens***)
- La regla de la cadena
- La negación de la conclusión (***Modus Tollens***)

La afirmación de la hipótesis (Modus ponens)

Siempre que
$p \to q$
p
sean verdaderas, puede concluirse
q
es verdadera

Ejemplo:

Si María resolvió el ejercicio correctamente, entonces María obtuvo 10 como respuesta.
María resolvió el ejercicio correctamente.
$\therefore$ María obtuvo 10 como respuesta.

Vea próxima tirilla cómica.


PEANUTS
NO HAY NADA PEOR QUE LA "DEPRESIÓN POSNAVIDEÑA."
UNA PROFUNDA DEPRESIÓN SE APODERA DE TUS HUESOS, TODO TE DUELE.... Y TE SIENTES CANSADA.....
12-27
Y SI ALGUIEN SIQUIERA **MENCIONA** "UNA PERDIZ EN UN PERAL", TE DAN GANAS DE GRITAR.
"¿UNA PERDIZ EN UN PERAL?"
AAUGH
SCHULZ

La regla de la cadena

Siempre que
$P \rightarrow q$
$q \rightarrow r$
son verdaderas, se concluye
$p \rightarrow r$
es verdadera

Ejemplo:

Si una nación tiene sobre 200 millones de habitantes, entonces ésta importa más de lo que exporta.
Japón tiene sobre 200 millones de habitantes.
$\therefore$ Japón importa más de lo que exporta.

Vea próxima tirilla cómica.


PEANUTS
¿CÓMO SABES QUE TIENES EL CORAZÓN ROTO?
8-28
BUENO, PORQUE SI TIENES EL CORAZON ROTO, NO PUEDES DORMIR.
CUANDO DAS VUELTAS EN LA CAMA SUS BORDES ASTILLA-DOS SE TE CLAVAN EN EL COSTADO
ME ALEGRA HABER HABLADO CON UN EXPERTO
SCHULZ

La negación de la conclusión

Siempre que
$P \rightarrow q$
$\neg q$
son verdaderas, se concluye
$\neg\ p$

Ejemplo:

Si una figura es un hexágono, entonces la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 720°.
En un polígono c, la suma de las medidas de los ángulos interiores es 540°.
$\therefore$ c no es un hexágono.

Vea próxima tirilla cómica.

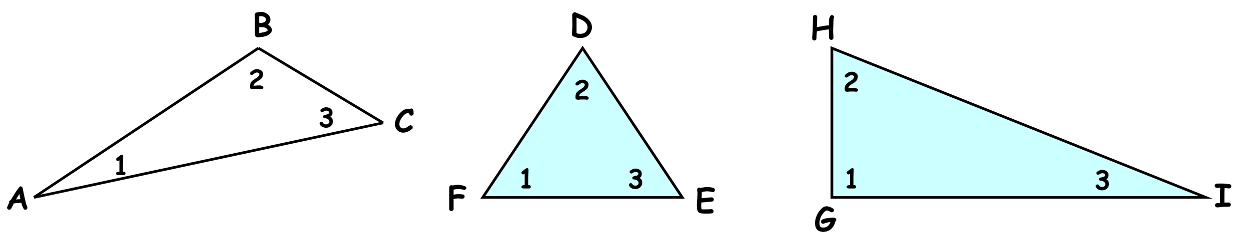

PEANUTS
SI EN REALIDAD ME AMARAS, DEJARÍAS DE TOCAR EL PIANO Y ME HABLARÍAS
11-29
A ESO SE LE LLAMA RESPONDER SIN RESPONDER

Objetivo: **A través de varias actividades, los estudiantes trabajarán el proceso de razonamiento inductivo y deductivo.**

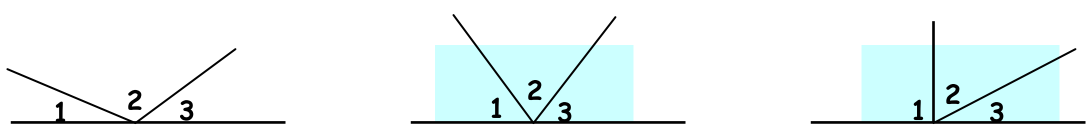
RESPUESTAS

Parte A

1 y 2. Posibles triángulos.



3.



4. Algunas observaciones pueden ser:

- En cada dibujo hay tres ángulos con diferentes medidas.
- No importa las medidas de los tres ángulos (en cada dibujo), al sumarlas obtengo un total de 180 grados (en cada dibujo).

- Los estudiantes pueden hacer una tabla o un diagrama que presente las medidas que correspondan a los triángulos creados por ellos. La tabla siguiente corresponde a los dibujos anteriores.

Primer dibujo	Segundo dibujo	Tercer dibujo
$m\angle 1 = 20°$ $m\angle 2 = 120°$ $m\angle 3 = 40°$	$m\angle 1 = 55°$ $m\angle 2 = 70°$ $m\angle 3 = 55°$	$m\angle 1 = 90°$ $m\angle 2 = 60°$ $m\angle 3 = 30°$
180°	**180°**	**180°**

5.
La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°.

Parte B

1.

Figura a			
lado 1	**lado 2**	**lado 1 + lado 2**	**lado 3**
40	26	66	34
40	34	74	26
34	26	60	40

Figura b			
lado 1	**lado 2**	**lado 1 + lado 2**	**lado 3**
28	37	65	24
28	24	52	37
37	24	61	28

Figura c			
lado 1	**lado 2**	**lado 1 + lado 2**	**lado 3**
46	32	78	23
46	23	69	32
23	32	55	46

2. No se puede hacer un triángulo con esas medidas.

$15 + 30 = 45 > 30$
$12 + 30 = 42 > 30$
$15 + 12 = 27 < 30$

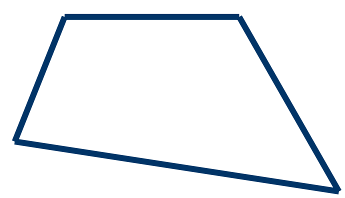
3. Algunas contestaciones de los estudiantes

- La suma de las longitudes de cada dos lados es mayor que la longitud del tercer lado.
- Para formar un triángulo necesito que la suma de las longitudes de dos segmentos sea mayor que la longitud del tercer segmento.
- Si una de las sumas de las longitudes de dos lados es menor que la longitud del tercer lado no puedo formar un triángulo.

ACTIVIDAD EL USO DEL CONTRAEJEMPLO EN LA GEOMETRÍA

RESPUESTAS

Es falsa. Un posible contraejemplo puede ser:



Los estudiantes deben estar conscientes de que los dibujos o diagramas son aceptados para argumentar, para dar contraejemplos.

ACTIVIDAD CONCLUYA USTED

RESPUESTAS

En esta actividad, los argumentos que planteen los estudiantes deben estar fundamentados. ***Las respuestas pueden variar entre cierto o falso para una misma premisa.*** Lo más importante es la dinámica que se desarrolle en la clase, donde los estudiantes puedan argumentar, con base, a favor de su decisión. Ese proceso los ayudará a tomar decisiones firmes en cualquier momento de sus vidas.

ACTIVIDAD SI..., ENTONCES...

RESPUESTAS

Las respuestas pueden variar en alguna que otra palabra. Lo más importante es que la sintaxis, la parte gramatical, esté correcta, y que el nuevo enunciado tenga la misma interpretación que el enunciado original.

1. Si un número termina en dos, entonces es impar.
2. Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo.
3. Si sigues mis pasos, entonces te harás rico.
4. Si un triángulo tiene dos de sus ángulos congruentes, entonces es isósceles.
5. Si **B** está en el $\overline{AC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces **B** es el punto medio del $\overline{AC}$.

Nota: Deben cumplirse ambos criterios para que **B** sea punto medio. Si no dice que **B** está en el $\overline{AC}$, podría darse el caso siguiente:

A ———— B B ———— C

AB = BC

Pero B no está en el $\overline{AC}$

$\therefore$ **B no es punto medio**

ACTIVIDAD EL MAESTRO JUSTO

RESPUESTAS

En el caso 2, el estudiante puede sentir que ha sido tratado injustamente y que su maestro no dijo la verdad. La proposición original indica que si ocurre (**p**) que obtengas la calificación más alta en todos los exámenes de geometría, entonces ocurrirá (**q**) que obtendrás la calificación más alta del curso. En este caso, el estudiante obtuvo la calificación más alta en todos los exámenes de geometría (**p**) pero no obtuvo la calificación más alta del curso ($\neg q$).

En el caso 1, el maestro no es injusto. Es la proposición original.

En el caso 3 y 4, el maestro no es injusto. Como no se obtiene la condición (obtener la calificación más alta en todos los exámenes de geometría), no importa si la conclusión se da o no.

ACTIVIDAD EXPLORANDO LA RECÍPROCA, LA INVERSA Y LA CONTRARECÍPROCA

RESPUESTAS

1. Si se vive en PR, entonces se vive en el área metropolitana.

Recíproca	Si vives en el área metropolitana, entonces vives en PR.
Inversa	Si no vives en PR, entonces no vives en el área metropolitana.
Contrarecíproca	Si no vives en el área metropolitana, entonces no vives en PR.

2. Si un número es positivo, entonces es mayor que 6.

Recíproca	Si un número es mayor que 6, entonces es positivo.
Inversa	Si un número no es positivo, entonces no es mayor que 6.
Contrarecíproca	Si un número no es mayor que 6, entonces no es positivo.

3. Si dos segmentos tienen la misma longitud, entonces son congruentes.

Recíproca	Si dos segmentos son congruentes, entonces tienen la misma longitud.
Inversa	Si dos segmentos no tienen la misma longitud, entonces no son congruentes.
Contrarecíproca	Si dos segmentos no son congruentes, entonces no tienen la misma longitud.

4. Si una figura es un polígono regular, entonces sus lados son congruentes.

Recíproca	Si una figura tiene sus lados congruentes, entonces es un polígono regular.
Inversa	Si una figura no es un polígono regular, entonces sus lados no son congruentes.
Contrarecíproca	Si una figura no tiene sus lados congruentes, entonces no es un polígono regular.

ACTIVIDAD PROPIEDADES DE UNA BUENA DEFINICIÓN

RESPUESTAS

1. No es una buena definición de punto medio.
   Contraejemplo:

2. Sí, es una buena definición de punto medio. Tiene las dos condiciones necesarias. Que el punto está en el segmento AB, entre A y B, y que las longitudes de AM y MB son iguales.

3. En esta definición el estudiante debe tener claro el concepto de bisectriz.

ACTIVIDAD ESQUEMAS DE RAZONAMIENTO

RESPUESTAS

A.

1. Entonces tiene dos ángulos congruentes.
2. Si una figura es triángulo equilátero, entonces es un polígono regular.
3. Entonces no nieva.

B.

1. El punto **C** está en la bisectriz perpendicular del $\overline{AB}$.
2. Si un ángulo mide más de 90°, entonces es obtuso.

ACTIVIDAD PRUEBAS: USO DE DEFINICIONES

RESPUESTAS

A. Son pruebas sencillas, donde se usarán las definiciones de punto medio, bisectriz y rectas perpendiculares.

B. Se debe fomentar que el estudiante se sienta cómodo a la hora de hacer pruebas. Deben ser informales, usando vocabulario matemático y el suyo propio, con sentido, secuencia y lógica. Recuerde que las personas pueden solucionar una misma situación de forma diferente, permita ese espacio.

1. Se puede probar con LLL o LAL.
2. Se puede probar con LAL.

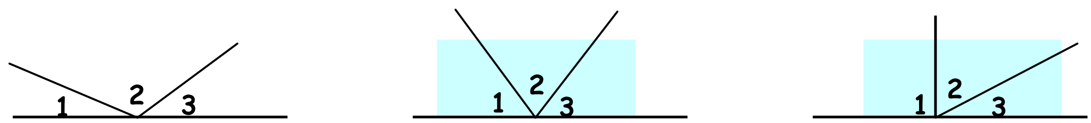
ACTIVIDAD EL PROCESO DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Parte A

1. Corta una hoja de papel de manera que se obtengan tres triángulos diferentes.

2. Identifica "las esquinas" de cada triángulo.

3. Corta "las esquinas" de cada triángulo y únelas, como se ilustra.



4. ¿Qué observas acerca de la suma de las medidas de los ángulos?

5. Completa la generalización siguiente:

   La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es __________.

Parte B

Considera los triángulos siguientes, en los cuáles se ilustran las medidas de cada lado.

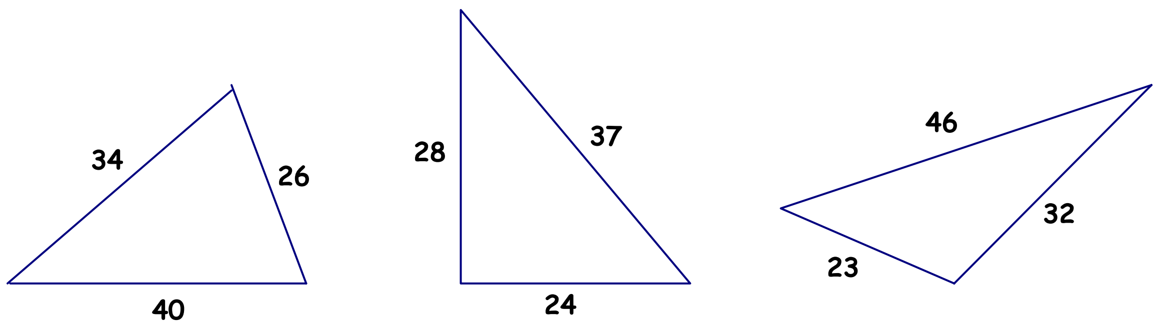


Figura a **Figura b** **Figura c**

1. Para cada triángulo, halla la suma de las longitudes de dos lados, y compara el resultado con la longitud del tercer lado.

2. Construye o dibuja un triángulo con las medidas siguientes:

30 cm, 15 cm, 12 cm

3. Haz una generalización de lo observado anteriormente (en los pasos 1 y 2).

ACTIVIDAD EL USO DEL CONTRAEJEMPLO EN LA GEOMETRÍA

Indica si la generalización siguiente es falsa o verdadera. Explica por qué, y si es falsa, da un contraejemplo.

"Todos los cuadriláteros tienen un par de lados paralelos."

ACTIVIDAD CONCLUYA USTED

Supongamos que ocurrió la historia siguiente:

El pequeño Jan Velásquez se sentó en un rincón a comer su pastel de Navidad. Metió su dedo entre la masa, sacó una pasa y dijo: "¡Qué buen muchacho soy!"

¿Cuál(es) de estas proposiciones puede(n) aceptarse basándose únicamente en la información proporcionada en la historia? ¿Por qué?

1. Jan comía un pastel de pasas.

2. Jan comprendió que era un buen muchacho porque sacó una pasa.

3. Era el 25 de diciembre.

4. Jan estaba sentado en un rincón porque estaba castigado.

5. Jan era un niño.

ACTIVIDAD SI..., ENTONCES...

Identifica la hipótesis y la conclusión en cada una de las proposiciones. Luego, formula la proposición en la forma "si-entonces" sin cambiar el significado.

1. Un número es par si termina en dos.

2. Un triángulo equiángulo debe ser equilátero.

3. Sigue mis consejos y te harás rico.

4. Un triángulo es isósceles siempre que dos de sus ángulos sean congruentes.

5. **B** es el punto medio del $\overline{AC}$ si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

ACTIVIDAD EL MAESTRO JUSTO

Supongamos que el maestro de matemáticas formula la proposición siguiente:

"Si se obtiene la calificación más alta
en todos los exámenes de geometría,
entonces se obtendrá la calificación más alta del curso."

¿En cuál de estos casos puede un estudiante sentir que se le ha tratado injustamente y que el maestro no dijo la verdad? Explica.

1. Se obtiene la calificación más alta en todos los exámenes.
   Se obtiene la calificación más alta al final del curso.

2. Se obtiene la calificación más alta en todos los exámenes.
   No obtiene la calificación más alta al final del curso.

3. No se obtiene la calificación más alta en todos los exámenes.
   Se obtiene la calificación más alta al final del curso.

4. No se obtiene la calificación más alta en todos los exámenes.
   No obtiene la calificación más alta al final del curso.

ACTIVIDAD EXPLORANDO LA RECÍPROCA, LA INVERSA Y LA CONTRARECÍPROCA

Escribe la recíproca, la inversa y la contrarecíproca de las proposiciones siguientes:

1. Si se vive en PR, entonces se vive en el área metropolitana.

2. Si un número es positivo, entonces es mayor que 6.

3. Si dos segmentos tienen la misma longitud, entonces son congruentes.

4. Si una figura es un polígono regular, entonces sus lados son congruentes.

ACTIVIDAD PROPIEDADES DE UNA BUENA DEFINICIÓN

¿Cuál de las siguientes, si alguna, es una buena definición de punto medio? Explica.

1. **El punto medio M de un segmento es un punto entre los extremos.**

2. **El punto medio del $\overline{AB}$ es el punto M en el $\overline{AB}$ entre A y B, a la misma distancia de A y de B, tal que MA = MB.**

3. **El punto medio M del $\overline{AB}$ es la intersección de $\overline{AB}$ y el bisector del $\overline{AB}$.**

A. Formula la conclusión correcta.

1. $p \rightarrow q$: Si ΔABC es isósceles, entonces tiene dos ángulos congruentes.
   P: ΔABC es isósceles.
   q: ?

2. $p \rightarrow q$: Si una figura es triángulo equilátero, entonces todos sus lados y ángulos son congruentes.
   $q \rightarrow p$: Si una figura tiene todos los lados y ángulos congruentes, entonces es un polígono regular.
   $\therefore$ $p \rightarrow q$: ?

3. $p \rightarrow q$: Si nieva, la temperatura será inferior a 0°C.
   $\neg q$: La temperatura es 0°C o superior.
   $\therefore \neg p$: ?

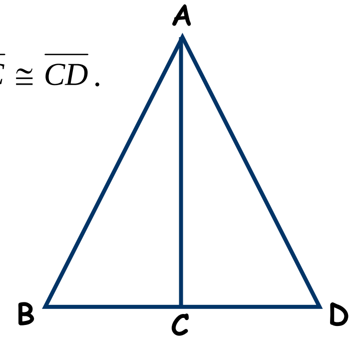
B. Incluye la información omitida para formular un esquema de razonamiento correcto.

1. (Dado): Un punto de la bisectriz perpendicular de un segmento equidista de los extremos del segmento.
   (Hipótesis): ?
   (Conclusión): El punto **C** equidista de los extremos del $\overline{AB}$.

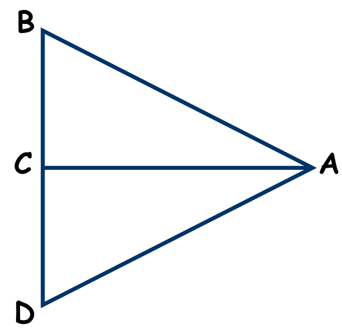
2. (Dado): ?
   (Hipótesis): $\angle ABC$ mide más de 90°.
   (Conclusión): $\angle ABC$ es un ángulo obtuso.

A. Emplea las definiciones de punto medio, la bisectriz y de rectas perpendiculares para probar cada proposición.

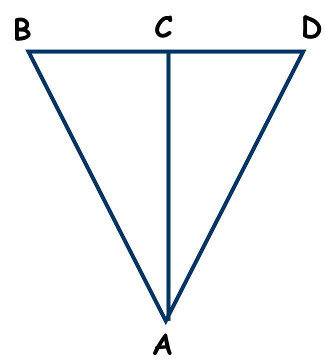
1. Si **C** es el punto medio del $\overline{BD}$, entonces $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.



2. Si el $\overline{AC}$ es la bisectriz perpendicular del $\overline{BD}$, entonces **C** es el punto medio del $\overline{BD}$.

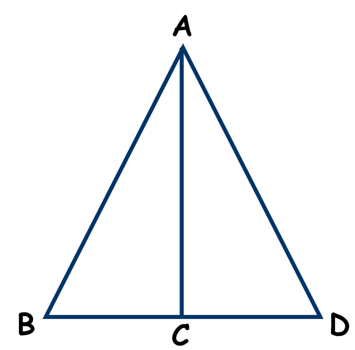


3. Si el $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, entonces $\angle ACD \cong \angle ACB$.

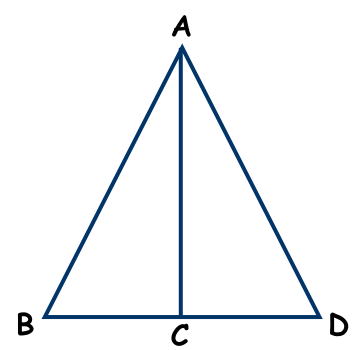


B. Usa las definiciones de bisectriz del ángulo, bisectriz del segmento, bisectriz perpendicular y punto medio, junto con los postulados sobre congruencia para probar cada proposición.

1. Si el $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y **C** es el punto medio del $\overline{BD}$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta ADC$.



2. Si el $\overline{AC}$ es la bisectriz perpendicular del $\overline{BD}$, entonces $\Delta ACB \cong \Delta ACD$.



Geometría Tridimensional

ACTIVIDAD — *IDENTIFICANDO FIGURAS EN EL ESPACIO*

Parte A — **Identificando cada una de las siguientes superficies**

Esta parte tiene como propósito repasar el conocimiento que tiene el estudiante sobre algunas figuras en el espacio. En caso de dudas, se debe repasar algunos conceptos de poliedros (prismas, pirámides, poliedros regulares o sólidos platónicos).

Parte B — **Doblando por los bordes**

Esta parte estimula al estudiante a desarrollar sentido espacial. Luego de seleccionar correctamente la figura se le puede sugerir que indique otro patrón, si es posible, para la misma figura.

Parte C — **Rotar alrededor de una recta**

Esta parte exige visualización del movimiento, al discutir la misma pida que indiquen objetos de uso común que corresponden a superficies o sólidos de revolución. (cono, cilindro, semiesfera, copa, toro o dona)

Parte D — **Proyección de sombra**

Este ejercicio requiere que el estudiante imagine que el objeto de tres dimensiones recibe luz para proyectar una sombra que sugiere una figura plana. Luego de ver las respuestas correctas, los estudiantes deben indicar por qué las demás figuras no son respuestas correctas.

Parte E — **¿Cuál objeto sugiere el patrón?**

Al discutir esta parte pida al estudiante que explique porqué sí y porqué no el patrón representa cada una de las figuras.

Parte F **Visualizando figuras en el espacio**

La visualización es una de las destrezas básicas necesarias para el desarrollo del pensamiento crítico. Las destrezas de clasificar, ordenar, observar patrones y estimar son fundamentales para que el estudiante desarrolle la capacidad para resolver problemas y hacer demostraciones matemáticas. Es importante que el estudiante reconozca la naturaleza de esta destreza de visualización y la practique continuamente. Un ejercicio muy útil para lograr este objetivo es la de describir figuras tridimensionales dibujadas en un plano, señalando cómo se les vería de lado, de frente y desde arriba (el tope).

PROCEDIMIENTO

Provea papel cuadriculado a cada estudiante. Solicite que trabajen el ejercicio 1. Genere una discusión del ejercicio. Durante la discusión grupal, haga énfasis en que expliquen cómo llegaron a su respuesta y por qué descartaron las otras. Luego de clarificar dudas indique que trabajen el ejercicio 2 y el 3. Proceda la discusión de la misma forma anterior.

Parte G **Superficies extrañas**

Muchas personas piensan que las superficies tienen dos lados opuestos, afuera y adentro. En las superficies cerradas para pasar de un lado a otro hay que atravesarlas y en las que no lo son, hay que cruzar el borde. En esta actividad, el estudiante descubrirá que ésto no es necesariamente cierto.

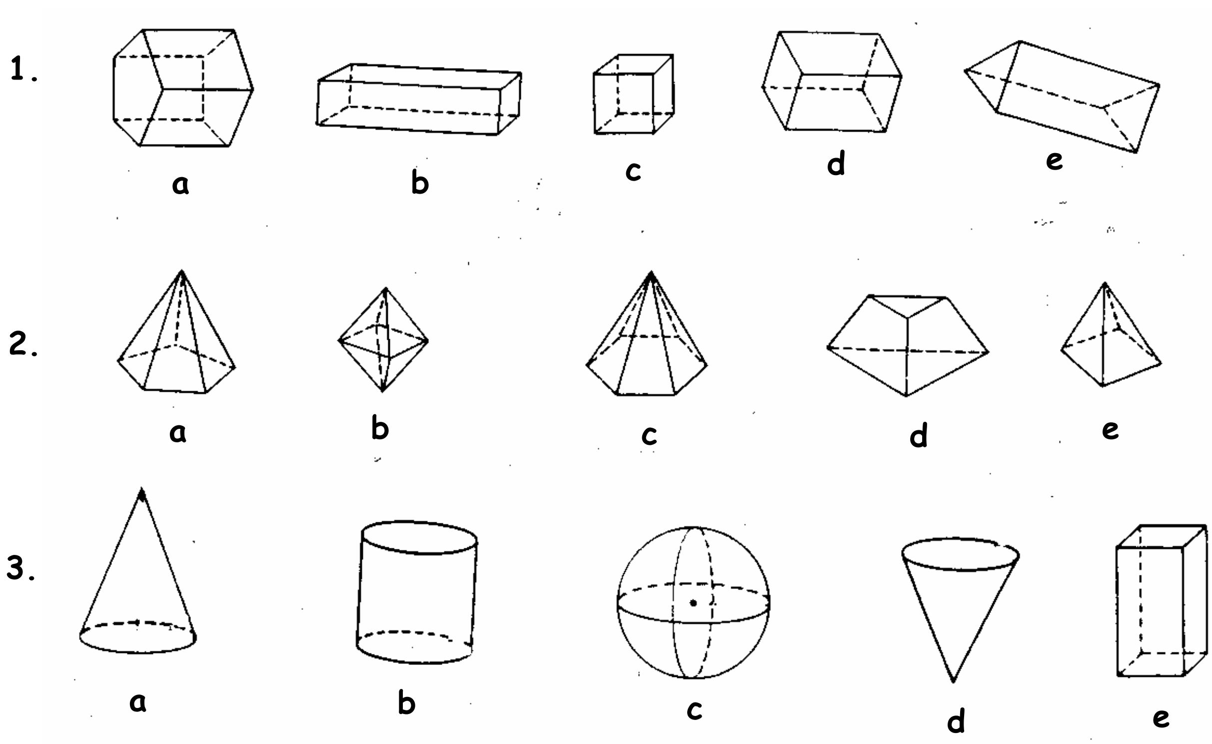
PROCEDIMIENTO

Entregue hojas de papel en blanco a cada grupo y solicite que realicen la actividad. Clasifica las superficies en uno y dos lados. Muestra el dibujo de la botella de Klein como otro ejemplo de una superficie de un solo lado. Explique.

ACTIVIDAD IDENTIFICANDO FIGURAS EN EL ESPACIO

Parte A Identificando cada una de las superficies siguientes

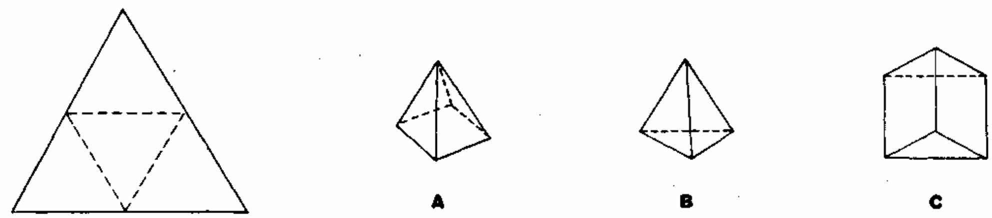
Escribe el nombre de cada figura



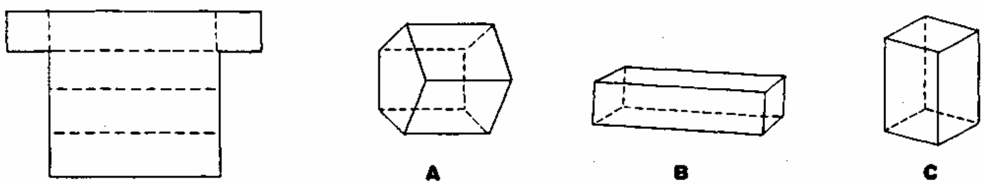
Parte B **Doblando por los bordes**

Cada diseño de la izquierda se puede doblar para hacer una de las figuras tridimensionales de la derecha. Indica cuál de esas figuras es la que resulta al final.

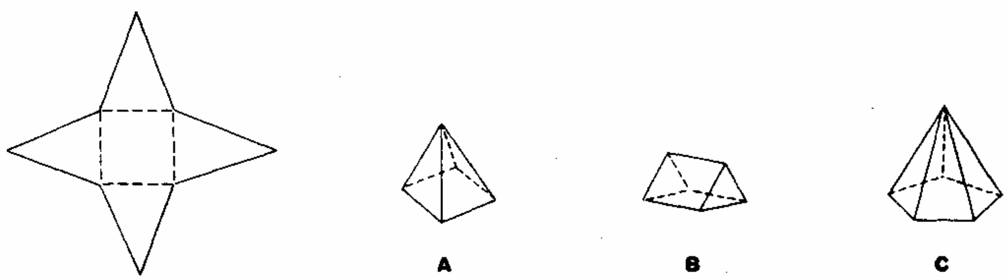
1.



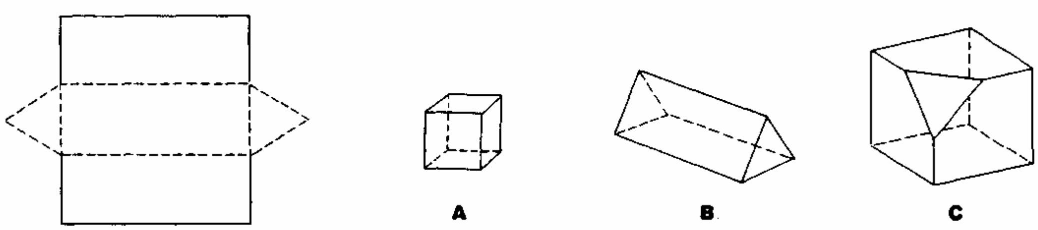
2.



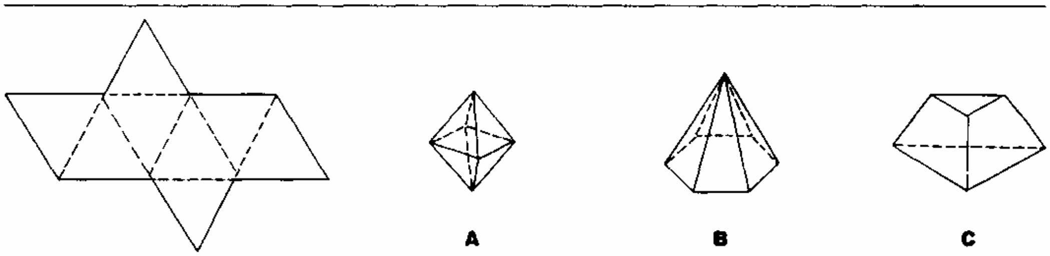
3.

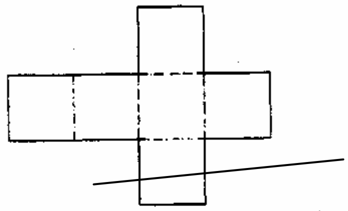


4.



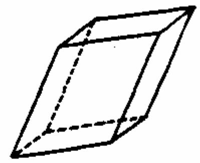
5.



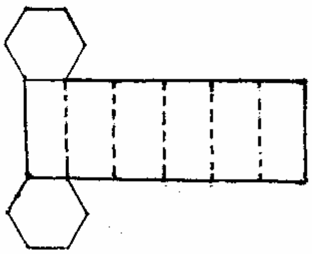
6. 

A

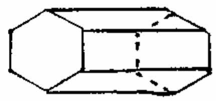
B



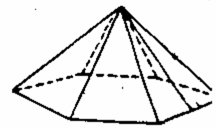
C

7. 

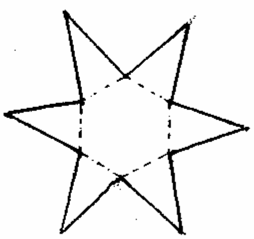
A

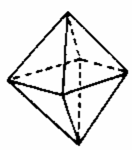


B

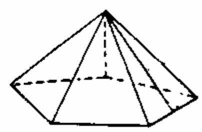


C

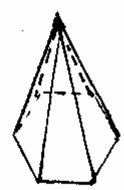
8. 



A



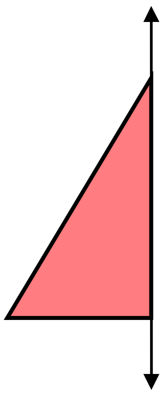
B

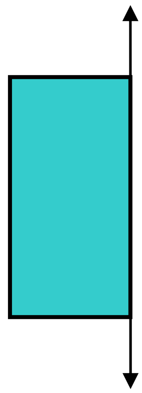


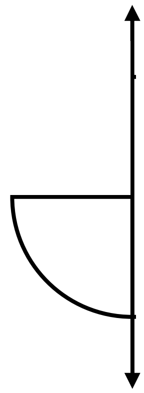
C

Parte C   Rotar alrededor de una recta

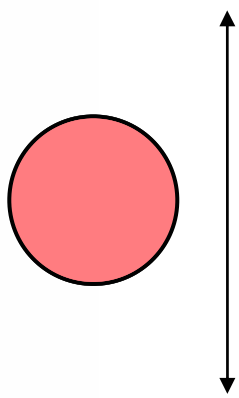
Al rotar la región indicada alrededor de la recta, describe la figura de revolución que se obtiene.

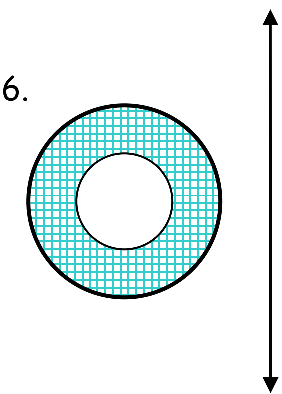
1.


2.


3.


4.

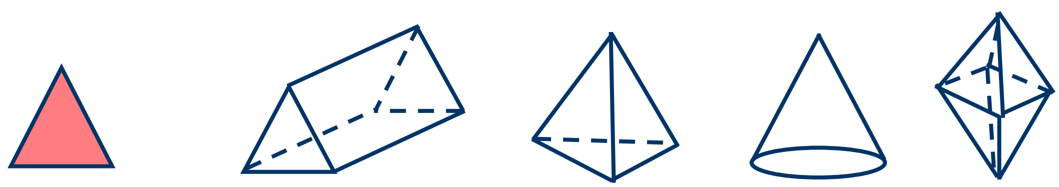

5.


6.


Parte D Proyección de sombras

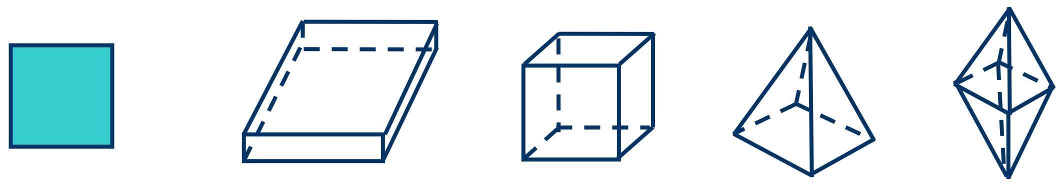
¿Cuáles de las siguientes figuras tridimensionales podría proyectar una sombra como se indica en (1) y (2)?

1.



A B C D

2.

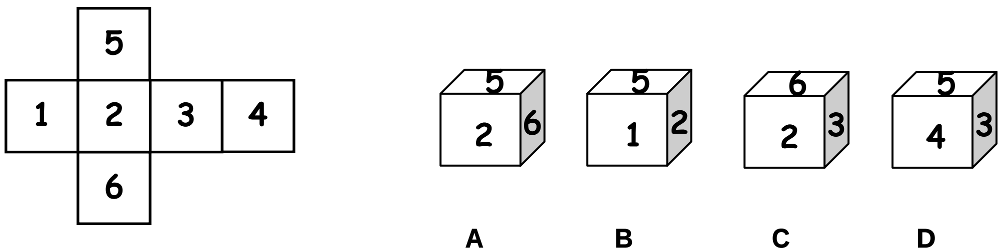


A B C D

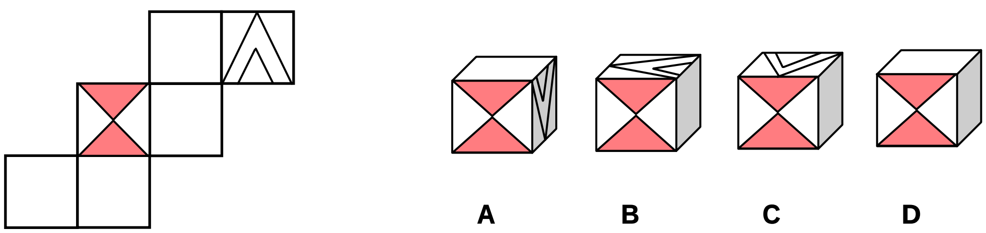
Parte E ¿Cuál objeto sugiere el patrón?

A la izquierda de cada figura se muestra un patrón para formar un objeto tridimensional. A la derecha aparecen varios objetos. Indica cuál es el objeto que sugiere el patrón. Explica por qué.

1.



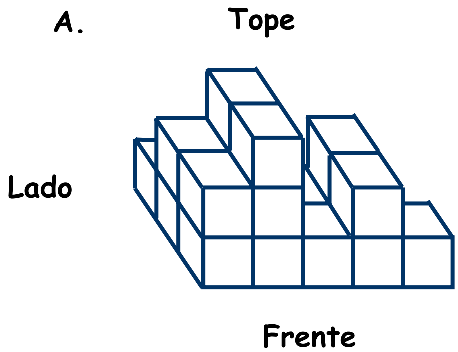
2.



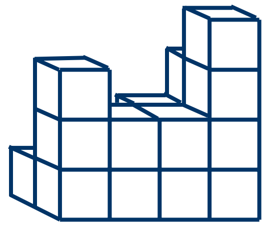
Parte F Visualizando figuras tridimensionales

1. Observa las figuras siguientes, y traza en el papel cuadriculado lo que ves de lado, de frente y desde arriba (tope).

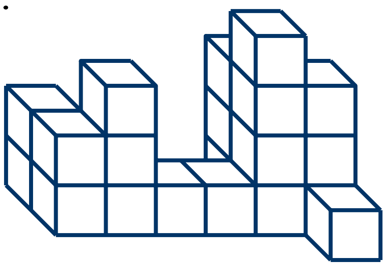
A.



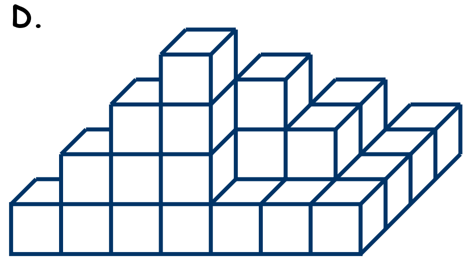
B.



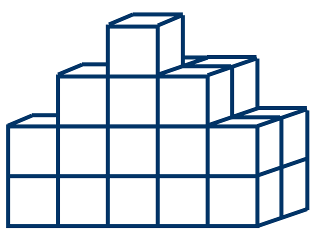
C.



D.



2. Indica el dibujo que representa la base o el tope la figura.



		4	3	3
2	3	4	3	2

a

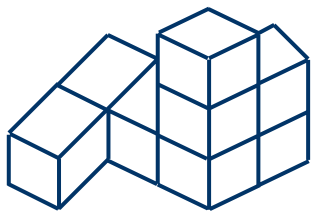
2		3	3	3
2	3	4	3	2

b

		3	3	2
2	3	4	3	2

c

3. Haz un dibujo de la base o el tope de la figura siguiente.



Parte G Superficies extrañas

1. Corta tres franjas de papel de $1\frac{1}{2}$ pulgada de ancho. Traza a lo largo de las franjas una línea por el medio de ambos lados. En los lados opuestos, marca los puntos medios **P** y **Q**.

2. Con una tijera, corta la franja sin doblez a lo largo de la línea trazada. Describe lo que ocurre. Repite el procedimiento con las otras dos franjas. Explica lo que observas.

3. Toma otra franja similar a las anteriores ($1\frac{1}{2}$ pulgada de ancho). Traza una línea a $\frac{1}{3}$ pulgada del borde izquierdo de cada lado. Dále un doblez de 180° en un extremo y une ambos extremos. Las líneas deben coincidir. Corta con una tijera a lo largo de la línea. Describe lo que ocurre.

ACTIVIDAD LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS

Esta actividad conecta los conocimientos previos de figuras planas con figuras sólidas. Ayuda a desarrollar destrezas sicomotoras y a observar y descubrir patrones.

1. Construye:

   a. Un triángulo equilátero con lado de 8 centímetros.
   b. Un cuadrado con lado de 8 centímetros.
   c. Un pentágono regular con lado que mida 6 centímetros.

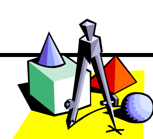
   Verifica con tus compañeros que las figuras construidas son congruentes.

2. Observa los patrones para construir los sólidos platónicos usando las figuras construidas en la parte 1. Reproduce los patrones en cartulina y dobla por las líneas entrecortadas hasta formar los sólidos platónicos.

3. Utiliza las figuras para llenar la información que se pide en la tabla siguiente.

Poliedro	**Número de vértices (v)**	**Número de caras (c)**	**Número de aristas (L)**
Tetraedro			
Hexaedro (Cubo)			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

4. Halla la relación entre v, c y L.



ACTIVIDAD ¿QUIÉN ES MAYOR?

Objetivo: **Encontrar la relación entre el volumen de un cilindro y el de un cono, el de un prisma y el de una pirámide.**

Materiales: **Cinta adhesiva, tijera, arroz, patrones, regla, cinta métrica, hojas transparentes**

Parte A: Corta los patrones 1 y 2, y prepáralos usando cinta adhesiva para obtener un prisma y una pirámide. Completa la tabla siguiente.

FIGURA	ALTURA	ÁREA DE LA BASE
Prisma		
Pirámide		

1. Elabora una conjetura sobre cómo compara el volumen de un prisma con el de una pirámide.
2. Usando las líneas entrecortadas corta un hueco en el fondo de la pirámide y llena la pirámide de arroz. Vacía el contenido de la pirámide en el prisma. Repite este procedimiento hasta llenar el prisma.
3. ¿Cuántas veces echaste el contenido de la pirámide en el prisma?
4. Podemos concluir que:

   Volumen prisma = _______ x volumen pirámide

   Volumen pirámide = _______ x volumen prisma

Parte B: Corta los patrones 3 y 4. Une los bordes hasta formar un cilindro y un cono. Pega con cinta adhesiva. Completa la tabla siguiente.

FIGURA	ALTURA	ÁREA DE LA BASE
Cilindro		
Cono		

1. Estima cómo compara el volumen de un cono con el de un cilindro.
2. Llena el cono con arroz. Vierte el contenido del cono dentro del cilindro. Repite hasta llenar el cilindro.
3. ¿Cuántas veces vaciáste el contenido del cono en el cilindro?
4. Podemos llegar a la conclusión de que:

Volumen del cilindro = _______ x volumen del cono

Volumen del cono = _______ x volumen del cilindro

Parte C: Selecciona dos hojas de papel transparente. Con una hoja construye la superficie lateral de un cilindro uniendo los lados más cortos del papel (Cilindro A). Usando la otra hoja, construye otro cilindro como el anterior sólo que esta vez unirás los dos lados más largos del papel (Cilindro B).

1. ¿Qué puedes decir del área de superficie de ambos cilindros?

2. Elabora una conjetura sobre cuál de los cilindros tiene el volumen mayor, o si tienen el mismo volumen.

3. Para probar su conjetura, mete el cilindro más alto (Cilindro B) dentro del cilindro más corto (Cilindro A). Llena el cilindro más alto con arroz. Una vez lleno, alza cuidadosamente hacia arriba el cilindro más alto (Cilindro B). ¿Cómo comparan ambos volúmenes?

4. Usa la información que conoces sobre círculos y cilindros para calcular el volumen de cada cilindro. Discute cómo llegaste a tus conclusiones.

Parte D: Corta una hoja transparente (acetato, transparencia) por la mitad y une las dos mitades como se muestra en la figura siguiente.

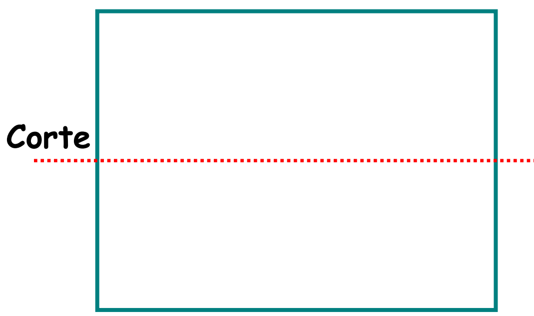


Figura A

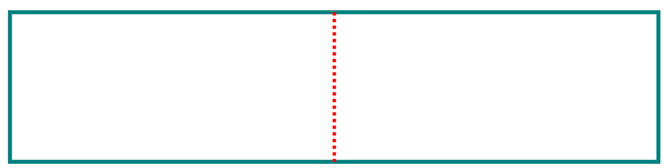


Figura B

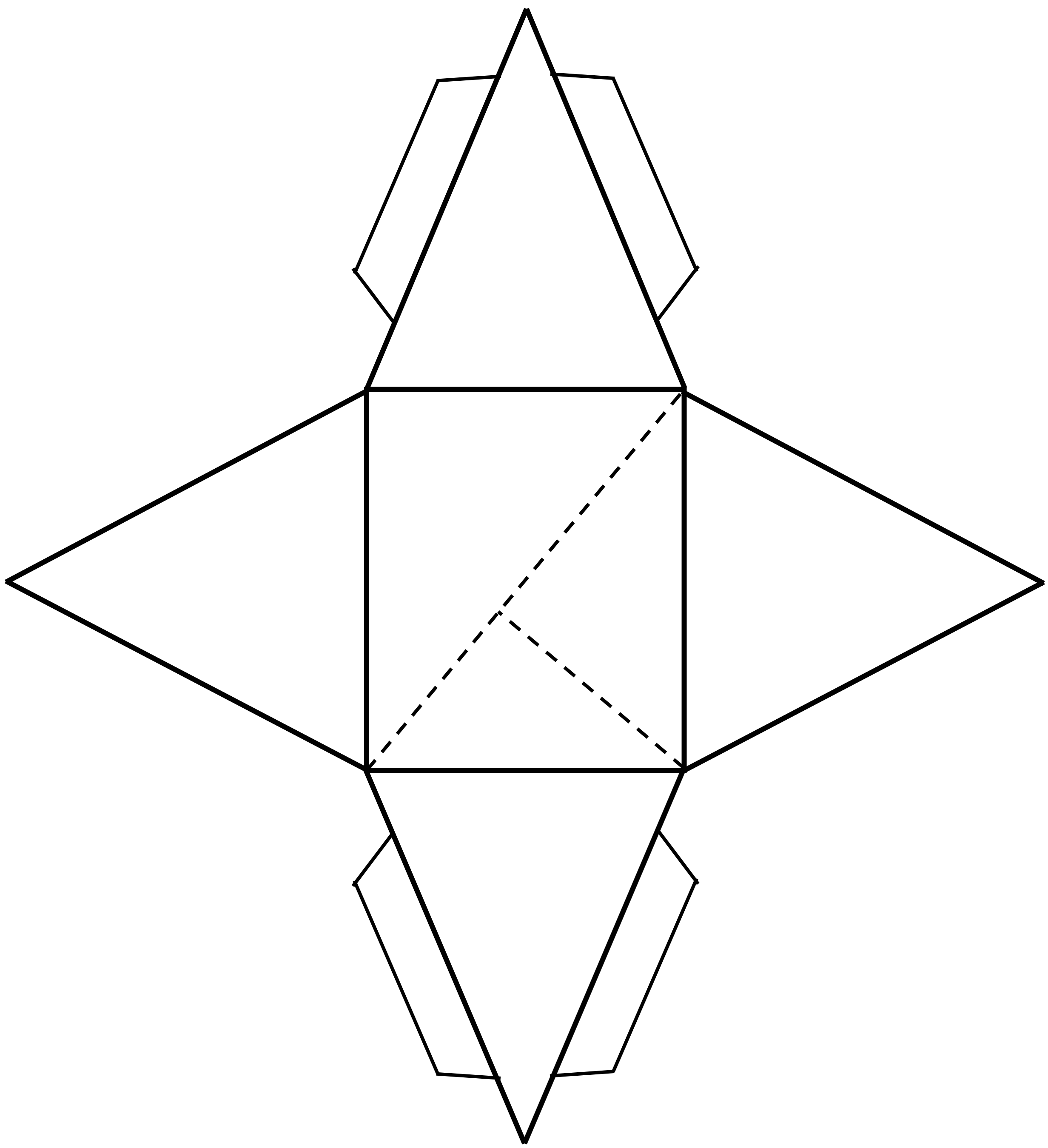
1. Construye la superficie lateral de un cilindro con la Figura B uniendo los extremos.

2. Compara el volumen de este cilindro con el volumen del cilindro A que obtuviste en la Parte C.

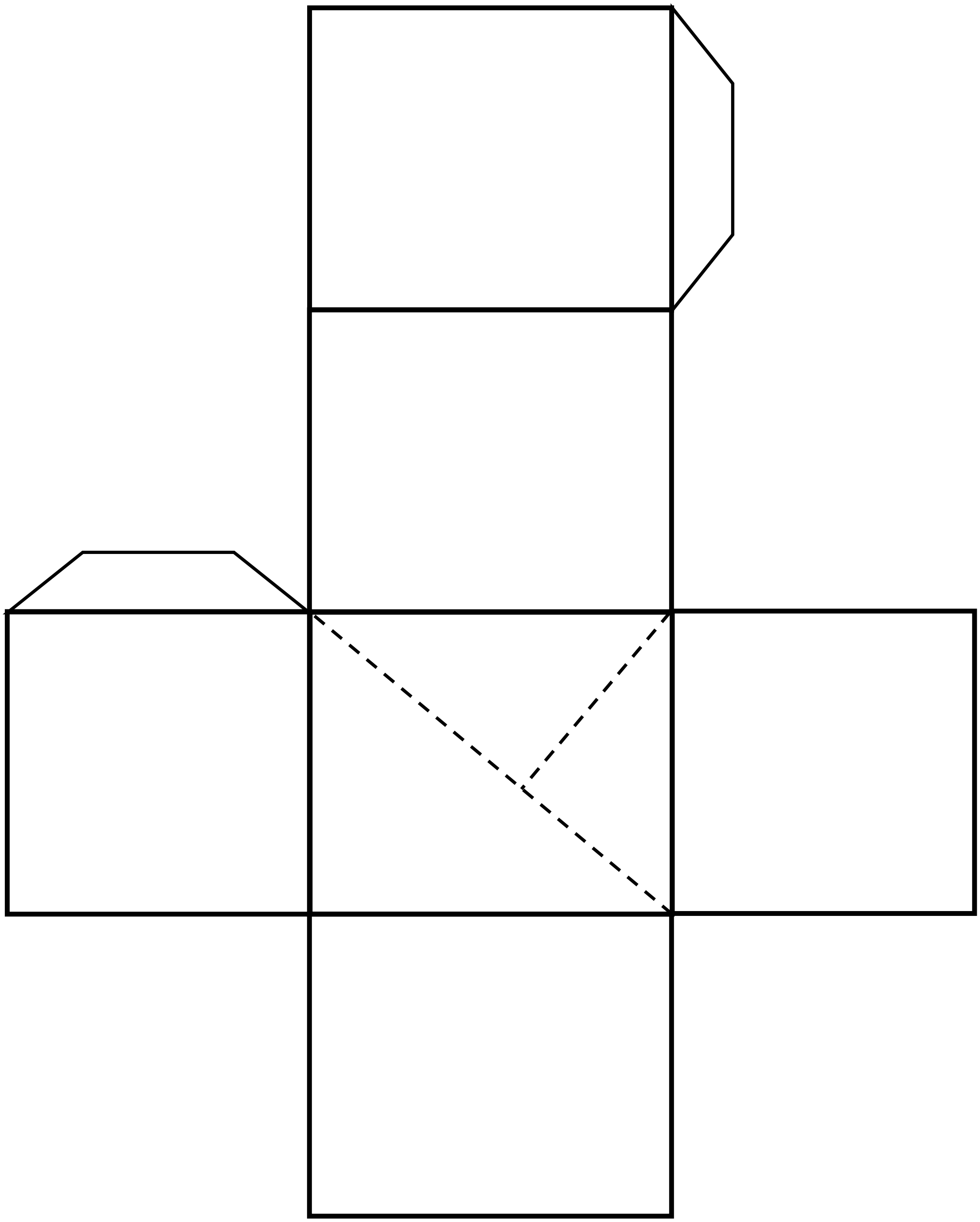
3. ¿Qué ocurrió? Explica.

4. ¿Puedes llegar a alguna generalización?

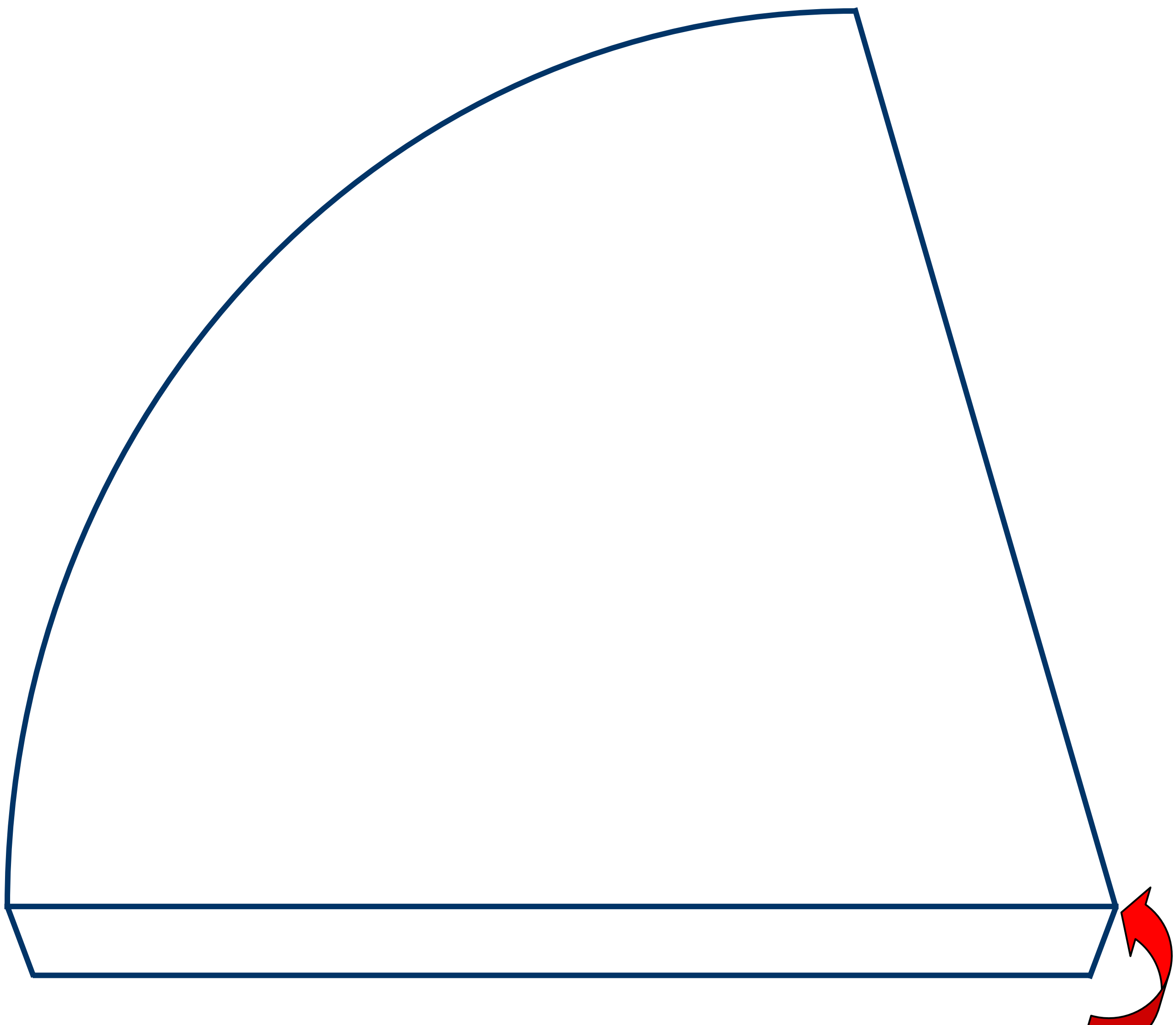
Plantilla Superficie Lateral de la Pirámide



Plantilla Superficie Lateral del Prisma



Plantilla Superficie Lateral del Cono



Plantilla Superficie Lateral del Cilindro

ACTIVIDAD CAJAS Y MÁS CAJAS...

Objetivo: **Entender el concepto de área de superficie y volumen.**

Materiales: **Tijera, papel cuadriculado 16 x 16, cinta adhesiva, lápices y papel**

PROCEDIMIENTO

Con el papel cuadriculado construye 7 cajas, todas diferentes, cortando cuadrados en las esquinas, doblando y pegando los lados. Los cuadrados que se corten deben ser números enteros.

1. Ordena las cajas por orden de capacidad, desde la de menor capacidad hasta la de mayor capacidad, simplemente observando y estimando.

2. Llena una de las cajas con arroz y vierte el contenido en otra caja para comparar los volúmenes.

3. Calcula el volumen de cada caja usando la fórmula.

4. Obtén el área de superficie contando los cuadrados.

5. Completa la tabla siguiente.

CAJA	VOLUMEN	ÁREA DE SUPERFICIE
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

6. Discute todo lo que observas en la tabla.

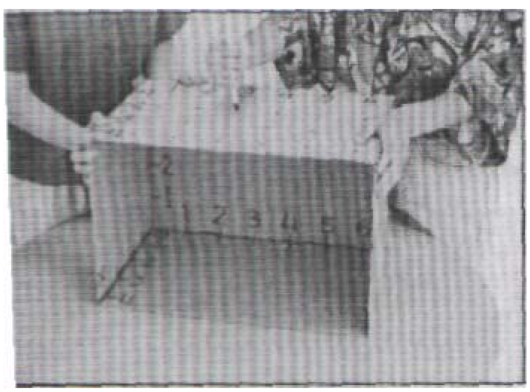
ACTIVIDAD *EXPLORANDO EL ESPACIO*

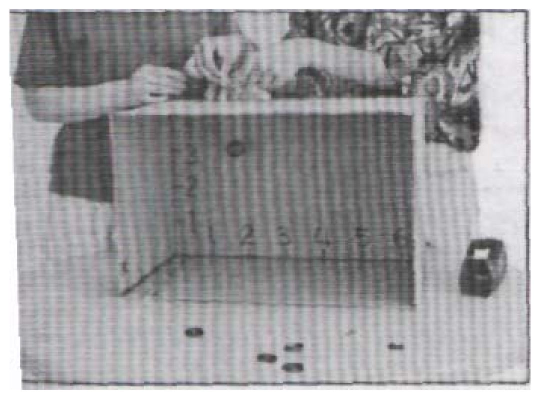
Objetivo: **Localizar coordenadas en el espacio.**

Materiales: **Una caja que tenga al menos las siguientes dimensiones: 10” x 10” x 10”, tijeras, una aguja grande, hilo, 10 o más botones o “paper clips”, cintas adhesivas (tape)**

PROCEDIMIENTO

1. Dibuja e identifica los ejes en los márgenes interiores de la caja como se ilustra más adelante. Haz las marcas en cada eje de manera que estén separadas por 3”.





2. Copia los ejes de ***x*** y ***y*** sobre la tapa de la caja. Marca el plano ***xy*** con huecos.
3. Corta por lo menos diez pedazos de hilo aproximadamente 3” más largo que el eje de ***z***. Amarra el botón o “paperclip” al final de cada hilo.
4. Localiza el punto (1, 2, 3) colocando el hilo a través del hueco (1, 2) en la tapa de la caja. Asegura el hilo colocando cinta adhesiva para que no resbale.
5. Haz una lista y localiza al menos diez ternas para los cuales se cumplen $x + y - z = 0$. ¿Será el punto (1, 2, 3) una solución para esta ecuación? Explica.
6. ¿Qué podrías decir sobre el conjunto de soluciones de $x + y - z = 0$?

Actividad: Tomada y modificada de *Integrated Mathematics 2*, McDougal Littell, pág. 581

Transformaciones: Un enfoque geométrico y algebraico

Objetivo: **Introducir al estudiante al concepto de transformación geométrica a través de actividades de exploración sobre rotaciones, traslaciones y reflexiones, entre otras.**

Materiales: **Regla, compás, transportador, papel cuadriculado**

INTRODUCCIÓN

La palabra ***transformación*** implica que un objeto cambia de alguna manera. En matemáticas se extiende esta idea para incluir el caso cuando luego del cambio el objeto transformado es idéntico a la versión original. A esta transformación particular se le conoce como la ***transformación identidad***.

En una ***transformación geométrica*** hay que tener en cuenta:

- la figura original
- una regla u operación que describa el cambio
- la figura que resulta después del cambio

El objeto antes del cambio se le llama ***preimagen*** y después del cambio ***imagen***.

Existen diferentes tipos de transformaciones geométricas. Algunas de ellas resultan en:

- **Cambios en el tamaño**
  Ejemplo: Si se tira una piedra en un lago se generan unas ondas circulares en la superficie del agua que se expanden según pasa el tiempo. La onda cambia el tamaño pero mantiene la forma.

- **Cambios en la forma**
  Ejemplo: Si se desenreda un cordón anudado cambia su forma pero no el tamaño.
- **Cambios en la posición que ocupa el objeto**
  Ejemplo: Cuando se levanta un objeto rígido cambia su posición pero no su tamaño o forma.

Una clase de transformación geométrica bien importante es aquella en la cual, la distancia entre cualesquiera dos puntos en el objeto antes del cambio es la misma que entre los mismos puntos transformados luego del cambio. Éstas se les conoce como ***movimientos rígidos***. Incluyen las rotaciones, traslaciones, volteos y reflexiones.

Objetivo: **A través de varias actividades el estudiante explorará algunas transformaciones geométricas, usando la geometría sintética y la analítica.**

ACTIVIDAD EXPLORANDO LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO REAL CARTESIANO

INTRODUCCIÓN

Repase los conceptos básicos relacionados con el plano real cartesiano como localización de puntos, distancias entre dos puntos, etc. Explique en forma sencilla el concepto de una trasformación geométrica en término de un cambio que se opera en un objeto. Introduzca el concepto de imagen y preimagen de una transformación. Explique que al transformar una figura en el plano real, cada punto **P(X, Y)** en la figura (preimagen) es transformado a un punto **P'(X', Y')** en su imagen. Luego, al indicar cómo cada punto **P(X, Y)** del plano real es transformado a otro punto **P'(X', Y')** en el mismo plano, se establece cómo cambia cada figura en éste. Explique que esa transformación se puede denotar simbólicamente mediante la notación: **(X, Y)** $\rightarrow$ **(X', Y')**. También, si la transformación se representa con una letra, digamos **T**, entonces **T(X, Y) = (X', Y')**.

Pregunta: ¿Cómo se transforma cualquier figura bajo la transformación **(X, Y)** $\rightarrow$ **(X, Y)**?

Respuesta: No cambia. La transformación **I** dada por **I(X, Y) = (X, Y)** es la transformación identidad en el plano.

PROCEDIMIENTO

Divida la clase en grupos. Entregue a cada estudiante papel cuadriculado y una transparencia al grupo. Solicite que lleven a cabo la actividad, y luego discútala.

RESPUESTAS

1. Para contestar la pregunta, se localizan los puntos **A, B, C** y los puntos transformados **A', B', C'**. Se trazan el Δ**ABC** y Δ**A'B'C'**.

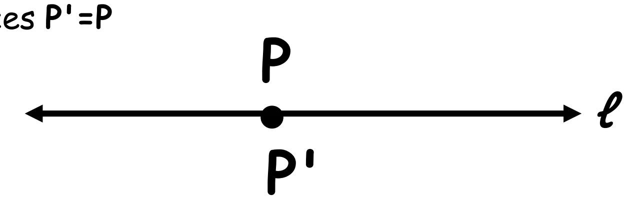
2. Posibles descripciones
   a. Una traslación horizontal de 6 unidades a la derecha y una vertical de 4 unidades hacia arriba.
   b. Un volteo de 180° alrededor del eje de abscisas, (una reflexión en el eje de abscisas).
   c. Una reducción en tamaño. Retiene la forma pero el área se reduce a $\frac{1}{4}$ parte.
   d. Un volteo de 180° alrededor de la bisectriz del 1^{er} y 3^{er} cuadrante.
   e. Rotar 90° a favor del reloj alrededor del vértice A. Luego, moverse 4 unidades verticalmente hacia abajo y después 8 unidades a la derecha horizontalmente.
   f. Una contracción vertical a la mitad con una expansión horizontal al doble, manteniendo la misma área.

ACTIVIDAD *HACIA UNA DEFINICIÓN DE REFLEXIÓN*

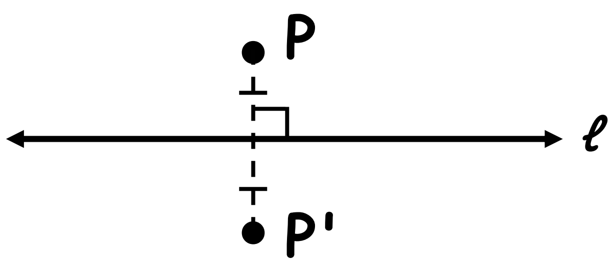
INTRODUCCIÓN

Definición: En un plano una reflexión sobre la recta ℓ es una transformación que cambia cada punto **P** del plano al punto **P'** como sigue:

a) Si **P** está sobre ℓ , entonces **P'=P**



b) Si **P** no está sobre ℓ , entonces ℓ es mediatriz de $\overline{PP'}$



P' es la imagen de **P** y **P** es la preimagen de **P'**

Notación: En vez de escribir: "**P'** es la imagen de **P**"
Escribimos **P'**= $\mathbf{r}_{\ell}$**(P)**
Leemos **P'** es la **r** reflexión en ℓ de **P**

PROCEDIMIENTO

Divida la clase en grupos y pida que lleven a cabo la actividad. Luego de la discusión en clase, presente la definición de reflexión incluída en la introducción.

ACTIVIDAD REFLEXIONES EN EL PLANO REAL CARTESIANO

PROCEDIMIENTO

Solicite que lleven a cabo la actividad, y luego discútala.

RESPUESTAS

1. a. (-2, -4)
   b. (2, 4)
2. a. (x, -y)
   b. (-x, y)
3. a. $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ o $R_x(x, y) = (x, -y)$
   b. $(x, y) \rightarrow (-x, y)$ o $R_y(x, y) = (-x, y)$

ACTIVIDAD REFLEXIONES DE FIGURAS

PROCEDIMIENTO

Solicite que cada grupo, luego de acordar la respuesta correcta a la actividad, dibuja la figura y la respuesta en la transparencia cuadriculada para la discusión grupal.

RESPUESTAS

1. Refleja los vértices sobre la recta ℓ y dibuja la figura resultante.
2. La manera más rápida de hacerlo sin doblajes, es reflejar el centro del círculo, hallar su radio y trazar la imagen con un compás.
3. Igual que en el problema 1, refleje cada vértice sobre la recta correspondiente y luego trace la imagen del triángulo.
4. Definición: La imagen reflejada de una figura sobre una recta ℓ es el conjunto de las imágenes reflejadas de cada punto en la figura.

Luego de la discusión, se pueden presentar los comentarios siguientes.

Notamos que bajo la reflexión:

1. Existe una correspondencia 1-1 entre los puntos de la preimagen y su imagen.
2. Si tres puntos son colineales entonces sus imágenes son colineales.
3. Si **B** está entre ***A* y *C***, entonces **B'** está entre ***A'* y *C'***.
4. La distancia entre 2 puntos en la preimagen es igual a la distancia entre los puntos reflejados correspondientes en la imagen.
5. $m\angle \mathbf{AEH} = m\angle \mathbf{A'E'H'}$

En resumen, obtenemos: **Postulado de las reflexiones**

Toda reflexión es una correspondencia 1-1 que preserva:

- La medida angular
- Colinealidad
- Distancia
- La relación "entre"

Pregunta: ¿Se conserva la orientación de la figura bajo una reflexión?

Respuesta: NO

ACTIVIDAD COMPOSICIÓN DE REFLEXIONES

INTRODUCCIÓN

Tenemos dos rectas, **ℓ** y **m,** en el plano. Si comenzamos con un punto **P** en el plano y lo reflejamos sobre la recta **ℓ**, obtenemos su imagen **P'**. Imagina que luego reflejamos **P** sobre la recta para obtener su imagen **P''**.

En la notación discutida escribimos.

$\mathbf{P' = r_\ell\ (P)}$

$\mathbf{P'' = r_m\ (P^1)}$

Esto es, sustituyendo $\mathbf{r_\ell\ (P)}$ por **P'** en la última relación: $\mathbf{P = r_m\ (r_\ell\ (P))}$

Así el punto original **P** es transformado al punto **P''**. Luego, aquí hay una nueva transformación distinta de r_ℓ **y** r_m, pero que se relacione con ambas.

Cuando una reflexión r_ℓ es seguida por una segunda reflexión r_m, el resultado de esta combinación es llamado la ***composición de las reflexiones***. Notación $r_m \circ r_\ell = T$.

> ***Definición:*** Una ***traslación*** es la composición de dos reflexiones sobre rectas paralelas.

Resultado: Si $m \parallel \ell$, entonces la traslación $r_m \circ r_\ell$ desliza perpendicularmente la figura en dirección de ℓ a **m**. La magnitud de este desplazamiento es dos veces la distancia entre ℓ y **m**.

PROCEDIMIENTO

Solicite que lleven a cabo la actividad. Si desean pueden copiar las figuras en una transparencia cuadriculada y trabajar la actividad ahí. Al discutir la actividad, preste atención particular a que en la descripción del movimiento de la figura (pregunta 2) se indique la orientación en que queda luego de la reflexión sobre ℓ y cómo regresa a la orientación original en la segunda reflexión. También, solicite que los grupos sobrepongan uno sobre otro sus respuestas a la pregunta 3 para ver si coincide la recta **m** trazada.

ACTIVIDAD EXPLORANDO LA ROTACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO

INTRODUCCIÓN

Cuando un punto **P** se mueve en un plano equidistante de un punto fijo **O** en el mismo plano se dice que **P** rota alrededor de **O**. **O** se llama el centro de rotación, $\overline{OP}$ es el radio de rotación, y el ángulo θ que genera $\overline{OP}$, el ángulo de rotación. Durante una rotación en el plano, el único punto que permanece sin cambiar de posición es el centro de rotación. Todos los otros puntos en la figura que rota cambian de posición con un mismo ángulo de rotación en término de reflexiones.

> ***Definición:*** Una ***rotación*** es la composición de dos reflexiones r_m y r_ℓ donde las rectas **m y** ℓ se intersecan.

Resultado: Si las rectas **m** y **ℓ** se intersecan en el punto **O**, entonces **O** es el centro de rotación y el ángulo de rotación es **2θ**, donde **θ** es la medida del ángulo recto o agudo que hay entre **m** y **ℓ**.

PROCEDIMIENTO

1. Explique, brevemente, el concepto de una rotación según se indica en la introducción. Haga énfasis en que para hallar el ángulo de rotación, si se tiene la figura original y la ya rotada, basta con hallar el ángulo de rotación de un solo punto en la figura. Explique que el objetivo de la actividad es hallar la relación que existe entre las rotaciones y las reflexiones. Luego de la discusión de la actividad provea la definición indicada en la introducción.

2. Solicite que lleven a cabo la actividad en el papel cuadriculado.

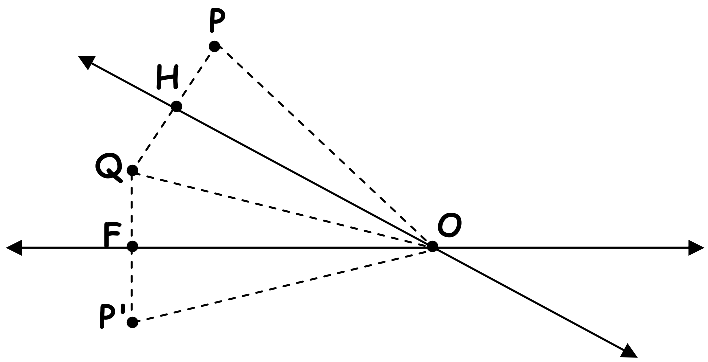
RESPUESTAS

1. **A''B''C''D''E''B''** es la imagen de **ABCDEB** bajo la composición de reflexiones r_y o r_ℓ .
2. Obtenemos la bandera **A''B''C''D''E''B''** al rotar la original **ABCDEB** alrededor del origen contra las manecillas del reloj a través de cierto ángulo.
3. 45°
4. 90°
5. Se llega al mismo resultado.

ACTIVIDAD EJERCICIOS SOBRE ROTACIÓN

RESPUESTAS

1. 74º
2. Use congruencia de triángulos



$\Delta POH \cong \Delta HOQ$ $\therefore OP = OQ$

$\Delta QOF \cong \Delta FOP'$ $\therefore OQ = OP'$

$\therefore OP = OP'$

ACTIVIDAD EXPLORANDO LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO REAL CARTESIANO

Considera Δ**ABC** con vértices **A** (-2, 6); **B** (-2, 2) y **C** (4, 6) .

1. Trace la imagen del triángulo **ABC** y del triángulo **A'B'C'** según la transformación indicada.

Transformación:

a. $(x, y) \rightarrow (x+6, y+4)$
b. $(x, y) \rightarrow (x, -y)$
c. $(x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$
d. $(x, y) \rightarrow (y, x)$
e. $(x, y) \rightarrow (y, -x)$
f. $(x, y) \rightarrow \left(2x, \frac{1}{2}y\right)$

2. Describa el tipo de transformación en cada uno de los anteriores.

ACTIVIDAD HACIA LA DEFINICIÓN DE REFLEXIÓN

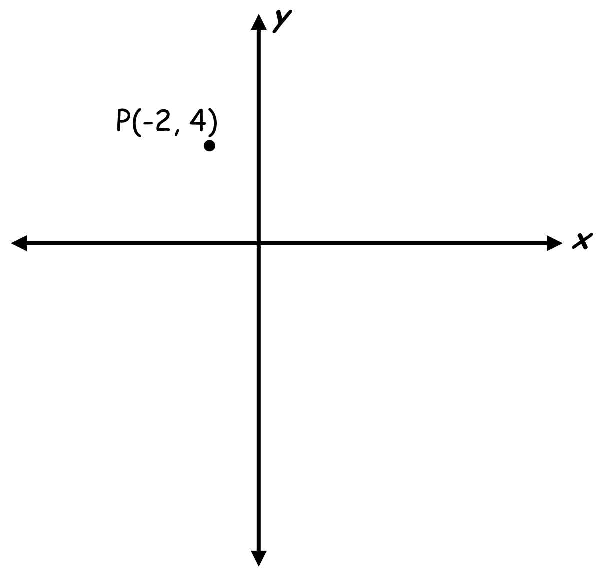
1. Traza una recta ℓ. Marca dos puntos **P, Q** fuera de ℓ y otro **R** sobre ℓ.

2. Doblando el papel por ℓ, marca los puntos en el papel que coinciden con **P, Q y R**. Identifícalos con **P', Q' y R'** , respectivamente. Traza los segmentos **PP', QQ'** y mídelos. Mide también desde cada punto a la recta ℓ, a lo largo del segmento correspondiente. ¿Qué observas? Mide el ángulo que se forma entre cada segmento y la recta ℓ. Describe lo que observas.

3. Dado un punto cualquiera **A** en el papel, ¿cómo determinarías el punto **A'** sin doblar el papel por ℓ?

1. Halla las coordenadas de la imagen reflejada de **P** sobre

   a. eje de ***x***
   b. eje de ***y***

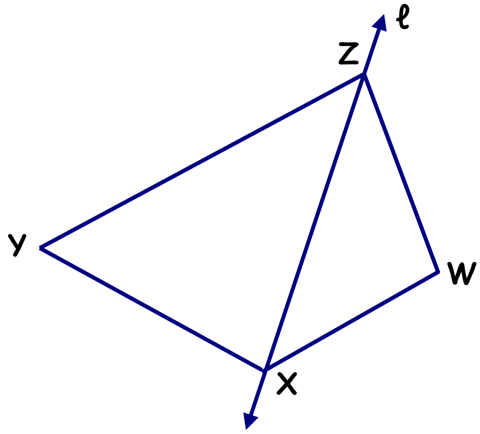


2. Dado un punto **P(x,y)**, ¿cuáles serán las coordenadas de la imagen reflejada de **P** sobre

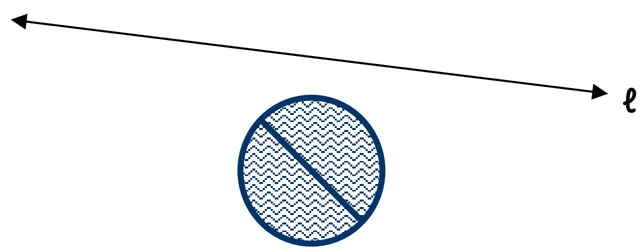
   a. eje de ***x*** ?
   b. eje de ***y*** ?

3. Halla una expresión algebraica para cada una de las reflexiones en el ejercicio 2.

1. Construye la imagen reflejada sobre la recta ℓ.

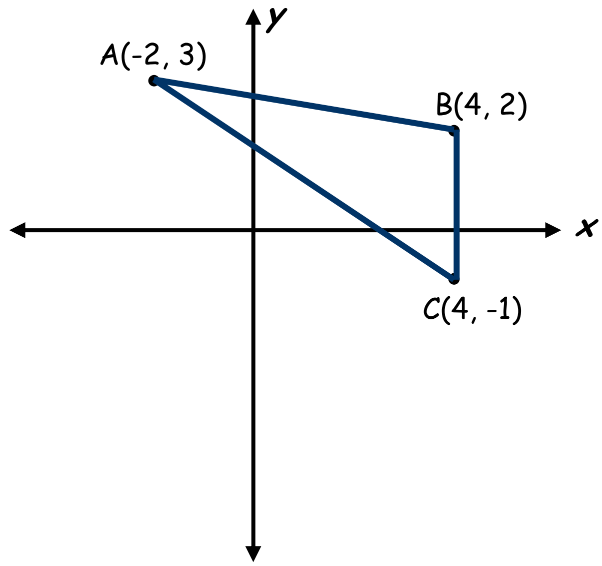


2. Construye la imagen reflejada sobre la recta ℓ.



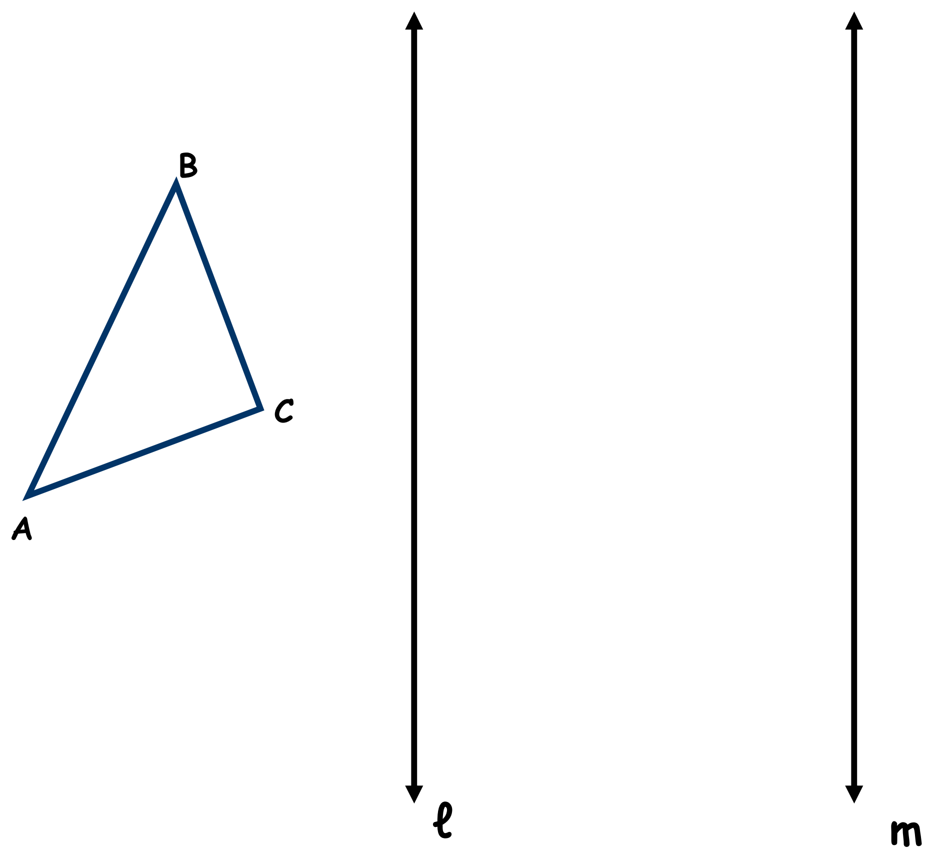
3. Construye la imagen reflejada sobre la recta ℓ.

a. ℓ es el eje de x
b. ℓ es la recta $y = x$



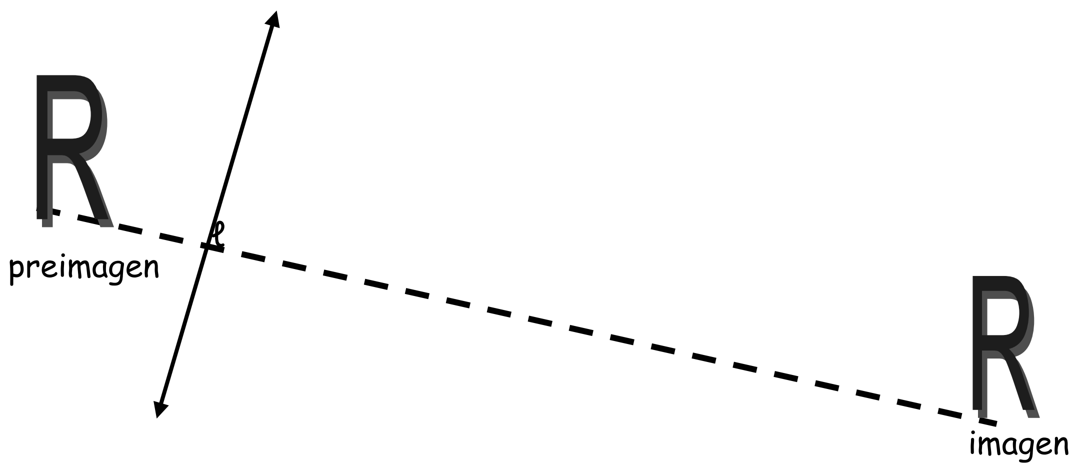
4. ¿Cómo definimos la imagen reflejada sobre una recta ℓ?

1. Refleja la figura con respecto a **ℓ**, y luego refleja la imagen obtenida con respecto a **m**.



2. Describe el movimiento de la figura.

3. A continuación se muestra la imagen de la letra **R**, cuando ésta es reflejada sobre la recta **ℓ**, seguida de una reflexión sobre una recta **m**. Traza la recta **m** de manera que lo ilustrado sea cierto.



ACTIVIDAD EXPLORANDO LA ROTACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO

Localiza los puntos siguientes: **A** (1, 1); **B** (3, 3); **C** (5, 5); **D** (7, 3); **E** (5, 1). Traza el segmento **AB** y el cuadrilátero **BCDE**. (Obtendrás una figura en forma de "bandera" **ABCDEB**)

Aplica la siguiente composición de reflexiones $\mathbf{r_y}$ **o** $\mathbf{r_\ell}$ donde:

a. $\mathbf{r_\ell}$ es una reflexión con respecto a la recta $y = x$

   Obtendrás la "bandera" **A'B'C'D'E'B'**

b. $\mathbf{r_y}$ es una reflexión con respecto al eje de ***y***

   Obtendrás la "bandera" **A''B''C''D''E''B''**

1. ¿Qué relación existe entre la "bandera" **A''B''C''D''E''B''** y la original **ABCDEB**?

2. Observa bien ambas figuras, **ABCDEB** y **A''B''C''D''E''B''**. Explica cómo puedes obtener la segunda de la primera sin hacer las reflexiones $\mathbf{r_\ell}$ y $\mathbf{r_y}$.

3. ¿Cuánto mide el ángulo entre $\boldsymbol{\ell}$ y el eje de **y**?

4. ¿Cuánto mide el ángulo entre la figura original y su imagen, luego de la composición de reflexiones?

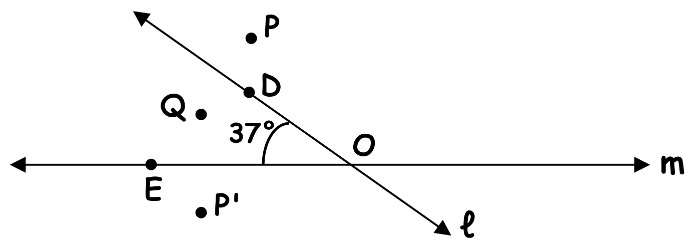
5. Si rotas la bandera **ABCDEB** alrededor del origen a través del ángulo indicado en la pregunta 4, ¿qué relación observas entre la rotación de la figura y la composición de reflexiones $\mathbf{r_y}$ y $\mathbf{r_\ell}$?

Usa las figuras siguientes para contestar las preguntas.

A. Datos

$r_\ell(P) = Q$
$r_m(Q) = P'$

El $\angle$ entre **m** y **ℓ** mide 37°.

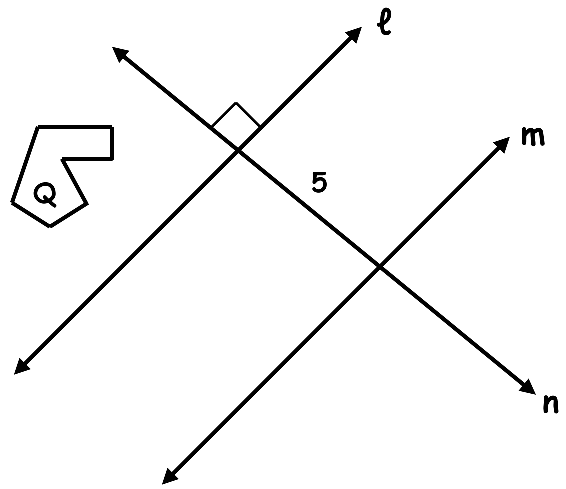


1. La medida del $\angle$**POP'** es _______________

2. Justifica cada conclusión

   a) **OP = OQ**
   b) **OQ = OP'**
   c) **OP = OP'**

B. Datos: $\ell \parallel m$, $\ell \perp n$.



Describe las transformaciones siguientes.

a. $r_\ell \circ r_m$
b. $r_n \circ r_m \circ r_\ell$

Matrices y transformaciones geométricas

MATRICES

Una matriz es un arreglo rectangular de números encerrados entre corchetes. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 4 & .03 \\ 2 & .9 & -8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & -9 & .5 \end{bmatrix}$$

La fila de una matriz corresponde al listado horizontal de los elementos mientras que el listado vertical de los elementos corresponde a una columna. Por ejemplo,

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{matrix} -1 & 4 & .03 \\ 2 & .9 & -8 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \longleftarrow \text{Primera fila} \\ \longleftarrow \text{Segunda fila} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Primera columna} & \text{Segunda columna} & \text{Tercera columna} \end{matrix} & \end{array}$$

La dimensión de una matriz con m filas y n columnas es **m** x **n**. La dimensión de la matriz que se mostró arriba es 2 x 3. Una matriz cuadrada es aquella cuya dimensión es **n** x **n**. Denotamos a una matriz con una letra mayúscula. La matriz del ejemplo anterior la podemos denotar como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & .03 \\ 2 & .9 & -8 \end{bmatrix}$$

Para indicar a cuál elemento de la matriz nos referimos usamos el símbolo a_{ij} donde ***i*** representa la fila y ***j*** representa la columna. En el ejemplo anterior tenemos:

$$a_{11} = -1, \quad a_{12} = 4, \quad a_{13} = .03, \quad a_{21} = 2, \quad a_{22} = .9, \quad a_{23} = -8$$

O sea, a_{11} quiere decir el elemento que se encuentra en la fila 1, columna 1.

Dado dos matrices, se puede llevar a cabo las operaciones de suma, resta y multiplicación. Para sumar o restar matrices las dimensiones de ambas tienen que ser iguales. Si ***A*** y **B** son las matrices, la suma se define como la nueva matriz ***C*** donde cada elemento tiene la forma $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Asimismo, la resta se define como la matriz **D** donde cada elemento tiene la forma $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Veamos un ejemplo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

La multiplicación de **A** por la matriz **B** parecerá al principio un proceso extraño. Primero, la cantidad de columnas de la matriz **A** tiene que coincidir con el número de filas de la matriz **B**. Es decir, se puede multiplicar una matriz de dimensión **m** x **n** por una de dimensión **n** x **p** y el resultado será una matriz de dimensión **m** x **p**. Para hallar el elemento en la fila ***i*** y la columna ***j*** del producto **AB**, multiplique cada elemento de la fila ***i*** de la matriz **A** por su elemento correspondiente de la columna ***j*** en la matriz **B,** y sume los resultados. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 2 & 4\cdot 2 + 0\cdot 3 + 1\cdot -4 & 4\cdot 4 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 0 - 5\cdot 2 & 3\cdot 2 + 2\cdot 3 - 5\cdot -4 & 3\cdot 4 + 2\cdot 0 - 5\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 16 \\ -7 & 32 & 12 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACIONES

> ***Definición:*** Una ***transformación*** del plano es una función ***f*** uno – uno de puntos del plano a puntos del plano.

En la ***Geometría Euclideana*** se permiten las transformaciones siguientes:

- Rotaciones
- Reflexiones
- Traslaciones
- Deslizamientos reflexivos
- Dilataciones

Si una propiedad se preserva bajo una transformación decimos que es una propiedad invariante. Por ejemplo, la distancia entre dos puntos, estar entre, ser colineal, la mediana de los ángulos, etc.

> ***Definición:*** Una transformación ***f*** es una ***isometría*** de A sobre B si preserva la distancia.

Recuerde que en el plano la distancia se define como:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Traslaciones

- Un segmento se traslada a un segmento paralelo
- No hay cambio en la orientación de la figura

Rotaciones

- Un segmento no es paralelo a su imagen
- No hay cambio en la orientación de la figura

Algunos ejemplos de isometrías

Reflexiones

- Una reflexión usa una recta fija L
- Hay cambio en la orientación de la figura

Deslizamiento Reflexivo

- Es una combinación de una traslación y una reflexión

Estos movimientos del plano también se pueden representar algebraicamente.

Definición: Una ***traslación*** **T** es una transformación de ***A*** a **B,** tal que: $(x, y) \to (x + a, y + b)$

Ejemplo La imagen de (5, 2) bajo la traslación $(x, y) \to (x + 8, y + 5)$ es el punto (13, 7).

Definición: Una ***rotación*** es una transformación del conjunto ***A*** al conjunto **B,** tal que

$$(x, y) \to (x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha,\ x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha),$$

donde α es el ángulo de rotación.

Ejemplo Halle la imagen de (2, 3) bajo una rotación de 60°.

Solución

$$x' = 2 \cos 60° - 3 \operatorname{sen} 60° = 2(\frac{1}{2}) - 3(\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$y' = 2 \operatorname{sen} 60° + 3 \cos 60° = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) + 3(\frac{1}{2})$$

$\therefore$ La imagen de (2, 3) es $\left(1 - 3\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)$.

Definición: Una ***reflexión*** es una transformación T: $A \to B$, tal que $\forall\ A_1 \in A$ corresponde un $B_1 \in B$ de manera que A_1 es simétrico a B_1 respecto a la recta L.

- Si la reflexión es a través del eje de ***x*** entonces:

  $(x, y) \to (x, -y)$
- Si la reflexión es a través del eje de ***y*** entonces:

  $(x, y) \to (-x, y)$
- Si la reflexión es a través de ***y*** = ***x*** entonces:

  $(x, y) \to (y, x)$
- Si la reflexión es a través de la recta ***y*** = **m*x*** entonces:

  $(x, y) \to (x \cos 2\theta + y \operatorname{sen} 2\theta,\ x \operatorname{sen} 2\theta - y \cos 2\theta)$

APLICACIONES

En las gráficas por computadora un punto en dos dimensiones se representa por la matriz fila (x y). Por ejemplo, el punto (2, 3) se representa por (2 3). Las transformaciones de puntos en dos dimensiones se representan por matrices 2 x 2. Es decir,

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} = (xa + yc \qquad xb + yd)$$

A continuación presentamos algunas de las transformaciones.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz identidad

$\begin{pmatrix} \text{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cambio de escala en x

$\begin{pmatrix} \text{a} & 0 \\ 0 & \text{a} \end{pmatrix}$ cambio de escala en x, y

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ reflexión eje de y

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ reflexión eje de x

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ reflexión a través recta y = x

$\begin{pmatrix} \text{a} & 0 \\ 0 & \text{b} \end{pmatrix}$ cambio de escala diferente para x, y

$\begin{pmatrix} 1 & \text{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dilatación en y

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ rotación 90°

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ rotación 180°

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rotación 270°

$\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ rotación ángulo θ

Generalmente uno no transforma una figura geométrica de punto en punto. Un polígono completo se puede cambiar si sólo se transforman sus vértices.

Ejemplo Refleje a través del eje de ***x*** el triángulo cuyos vértices son (3, 2), (5, 7) y (8, 11)

Solución

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 9 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -9 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, los vértices de la imagen del triángulo son: (3, -2), (5, -9) y (8, -11)

Una sola matriz puede representar el producto de dos transformaciones. Por ejemplo, ¿qué matriz representa una rotación de 90° seguida de una reflexión a través de la recta ***y*** = ***x***?

Solución $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

SEMEJANZA

Los movimientos Euclideanos son fundamentales en el desarrollo de la geometría. Sin embargo, la distancia juega un rol limitado en la geometría. A veces no nos interesa que la medida de dos segmentos sean iguales, sólo nos interesa que la razón se mantenga igual.

La **semejanza** es un tipo de transformación incluso más general que los movimientos rígidos del plano. Este concepto se utiliza en:

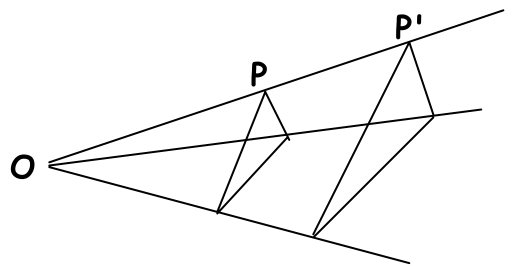
- Fotografía
- Mapas
- Modelos a escala

Observe que en todos éstos **NO** se preserva la distancia.

Definición: Una ***semejanza*** es una transformación del plano en sí mismo tal que si A, A′ y B, B′ son los puntos correspondientes, el largo del $\overline{A'B'}$ es r veces el del $\overline{AB}$, donde r ≠ 0.

Observe que esta transformación alarga o contrae un segmento. Puede cambiar la distancia de la imagen pero no su forma.

Definición: Una ***dilatación*** H(O, r) es una semejanza que asocia un punto P con un punto P′ donde m(O P′) = rm(OP). Los puntos O, P y P′ son colineales y $r \neq 0$. Si $r < 0$, entonces O está entre P y P′. Si $r > 0$, entonces P y P′ están en el mismo lado de O.



La transformación para la dilatación es: $(x, y) \rightarrow (rx, ry)$

En una semejanza puede haber cambio en posición y cambio uniforme en tamaño pero no hay cambio en la forma.

ACTIVIDAD LAS FRUTAS DE MARTA

Objetivo: **Utilizar las matrices para tabular información y conocer las operaciones de matrices en la solución de problemas.**

Materiales: Programa Excel

Parte I

Marta va al supermercado a comprar frutas. La cantidad de frutas y el precio por unidad de las frutas se provee a continuación.

Cantidad de frutas que compró Marta:

Guineos	Manzanas	Chinas
10	4	8

Precio por unidad:

.15	**Guineos**
.45	**Manzanas**
.25	**Chinas**

1. ¿Cuánto gastó Marta en frutas?
2. Explica cómo obtuviste la contestación a la pregunta 1.
3. Explica cómo está colocada la información sobre la cantidad de frutas que compró Marta y cómo está expresada la información respecto al precio por unidad.
4. Explica qué operaciones hay que llevar a cabo para hallar cuánto gastó Marta, dado que la información está colocada en esa forma.

REVISA TUS CONTESTACIONES Y ESPERA A LA DISCUSIÓN EN GRUPO ANTES DE PASAR A LA PRÓXIMA PÁGINA.

Parte II

1. Supongamos que hay dos supermercados, *Pueblo* y *Amigo*, cerca de Marta. En *Pueblo* el precio por unidad de los guineos es de 15 centavos, las manzanas cuestan 45 centavos cada una y cada china cuesta 25 centavos. En *Amigo,* el precio por unidad es de 12 centavos, 50 centavos y 20 centavos para los guineos, manzanas y chinas, respectivamente. Para la primera semana de mayo Marta piensa comprar 10 guineos, 4 manzanas y 8 chinas. Para la segunda semana de mayo va a comprar 15 guineos, 10 manzanas y 4 chinas. Establece una forma de colocar la información usando matrices.

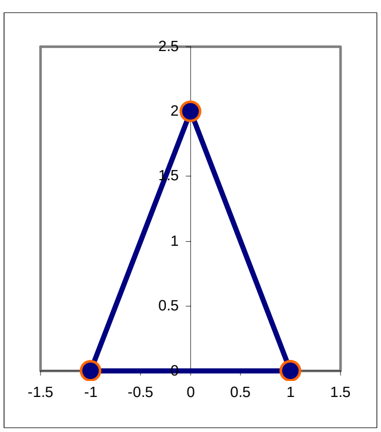
2. Marta desea averiguar cuánto le costará la compra en la primera semana en ambos supermercados y también el costo de la compra en la segunda semana para tomar una decisión de seleccionar el supermercado donde menos le cueste la compra. Usa matrices para hallar la solución a esta situación.

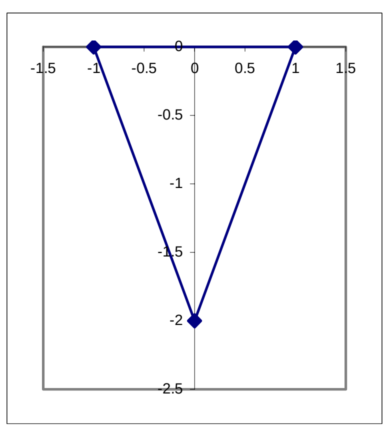
MULTIPLICACIÓN DE MATRICES USANDO EL PROGRAMA EXCEL

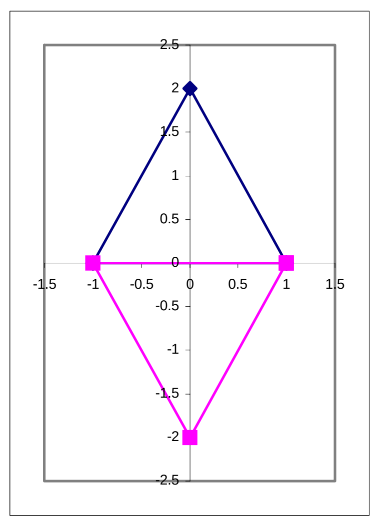
MATRIZ M **MATRIZ N**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Coloque el cursor en G4.
2. Seleccione el icono fx.
3. Seleccione Math & Trig.
4. En Function Name seleccione MMULT.
5. En ARRAY 1 oprima el botón rojo/azul de la derecha, sombree la matriz **M**, y regrese al botón rojo/azul y oprímalo.
6. En ARRAY 2 oprima botón rojo/azul, sombree matriz **N**, y oprima nuevamente botón rojo/azul.
7. Aparecerá en la celda G4 un 1. Sombree el uno y siete celdas más hasta lograr matriz 4 x 2.
8. Oprima F2. Oprima a la vez SHIFT , CTRL, ENTER. Aparecerá la multiplicación de **M** por **N**.







1. Para trazar dos gráficas en el mismo plano, coloca el cursor en el PLOT AREA, oprime el mouse.
2. En el menú selecciona CHART.
3. Selecciona SOURCE DATA
4. Aparece la gráfica. Selecciona SERIES
5. Oprime el botón de ADD.
6. Oprime el botón rojo de x-values.
7. Ve a la matriz y sombrea todos los valores que correspondan a la primera coordenada.
8. Oprime el botón rojo de la derecha.
9. Ejecuta la misma operación para los valores de la segunda coordenada.

ACTIVIDAD LOS CAMBIOS DEL CINCO

Objetivo: **Usar las matrices para llevar a cabo transformaciones geométricas.**

Materiales: **Papel cuadriculado, Programa Excel**

Parte I

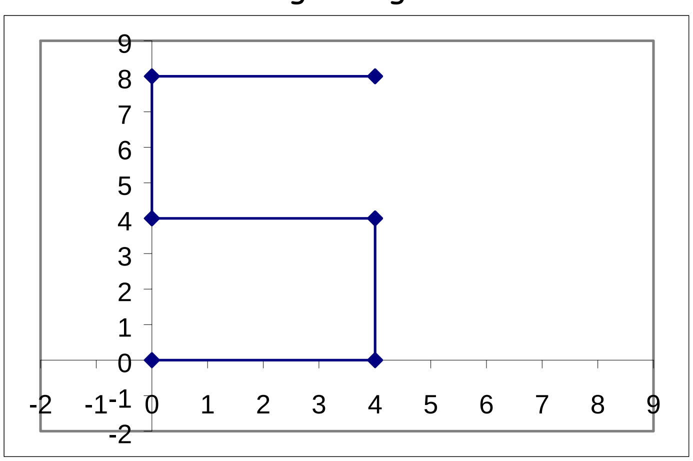
1. Localiza los pares ordenados siguientes y únelos mediante un segmento según el orden dado: (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1), (0, 2) y (1, 2). ¿Qué figura obtuviste?
2. Representa esos pares ordenados en una matriz 6 x 2 e identifica la matriz con la letra **O**.
3. Traslada la figura tres unidades hacia la derecha y dibújala en el mismo plano cartesiano. ¿Cuáles son los pares ordenados de la figura trasladada? Escribe esos nuevos pares ordenados en una matriz 6 x 2 e identifica la matriz con la letra **T**.
4. Compara la matriz **O** con la matriz **T**. Explica cómo obtener la matriz **T** a partir de la matriz **O**.
5. Traslada la figura original tres unidades hacia la derecha y dos unidades hacia abajo. Dibuja esta nueva figura, indica los pares ordenados que obtuviste, escríbelos en una matriz 6 x 2 e identifica la nueva matriz con la letra **S**.
6. Explica cómo se puede obtener la matriz **S** de la matriz **O**.

REVISA TUS CONTESTACIONES Y ESPERA LA DISCUSIÓN EN GRUPO ANTES DE PASAR A LA PRÓXIMA PÁGINA.

Parte II

1. Lleva a cabo una reflexión de la figura original a través del eje de ***x***. Dibuja la nueva figura en el mismo plano cartesiano. Escribe los pares ordenados de la nueva figura en una matriz 6 x 2 e identifica esta nueva matriz con la letra **R**.
2. Compara la matriz **R** con la matriz ***O***.
3. Multiplica la matriz ***O*** por la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. ¿Qué observas? Compara con la matriz **R**.
4. Si queremos una reflexión a través del eje de ***y***, ¿por cuál matriz debemos multiplicar a la matriz ***O***?
5. Dibuja en otro plano cartesiano la figura original. Multiplica la matriz **O** por la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y denota esta nueva matriz con la letra **N**. Localiza los pares ordenados, únelos y explica qué transformación hubo.
6. Multiplica la matriz ***O*** por la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y denota esta nueva matriz con la letra ***C***. Localiza los pares ordenados de esa nueva matriz, únelos y explica qué transformación sufrió la figura original.

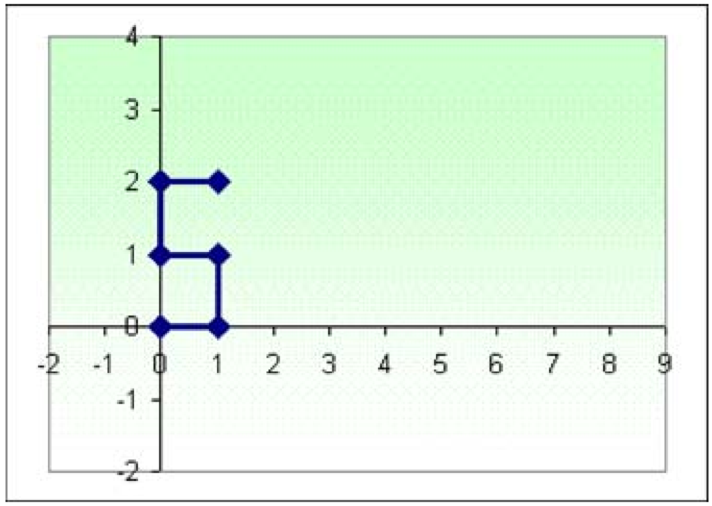
7. Si queremos hacer la figura siguiente:



¿Qué tenemos que hacer a la matriz ***O*** para lograr obtener una matriz que represente los pares ordenados que aparecen en el recuadro?

GRÁFICAS

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



1. Para construir esta gráfica escribe la matriz comenzando en la celda A1, y sombrea las celdas de la matriz.
2. Selecciona el icono de gráficas.
3. Selecciona la gráfica Scatter y el subtipo 3.
4. Oprime el botón NEXT.
5. Aparece DATA RANGE. Debes dejarlo como está y oprimir NEXT.
6. Aparece TITLE y otros. Puedes escribir el título de la gráfica, borrar los números de los ejes, eliminar líneas horizontales, colocar una leyenda, o identificar los ejes.
7. Oprime el botón de NEXT.
8. Aparece en qué lugar quieres colocar tu gráfica. Déjalo como está.
9. Oprime FINISH.
10. Puedes hacer cambios a la gráfica.
    a. Para cambiar el alcance de los ejes pon el cursor sobre el eje, oprime el "mouse". Vas a FORMAT, seleccionas SELECT AXIS y cambia el alcance.
    b. Para cambiar el color del fondo de la gráfica, pon el cursor en el área, oprime el "mouse", vuelve a oprimir el "mouse" dos veces y aparece PATTERNS. Selecciona el color de tu preferencia.

ACTIVIDAD EL COHETE

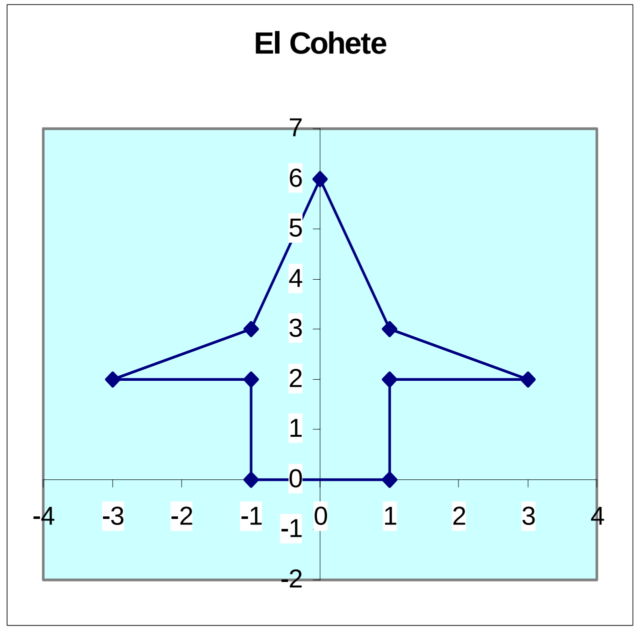
Objetivo: **Usar matrices, operaciones de matrices y EXCEL para llevar a cabo transformaciones de figuras geométricas.**

Materiales: **Papel cuadriculado, Excel**

PROCEDIMIENTO

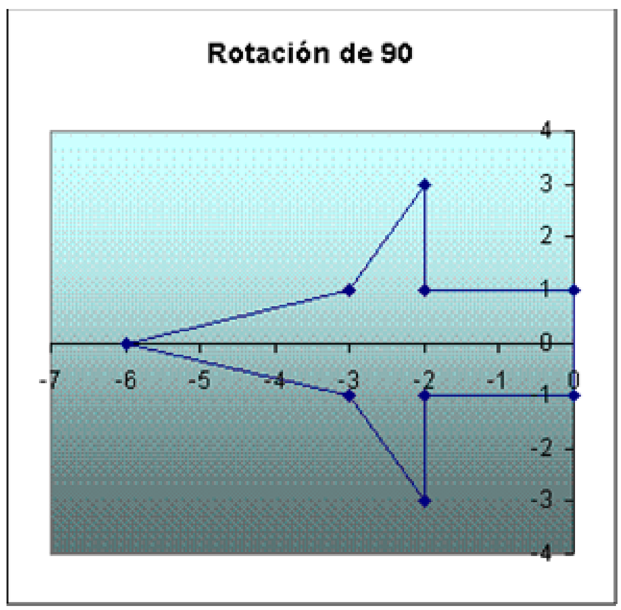
1. En un papel cuadriculado, localiza los pares ordenados siguientes y únelos en el orden dado: (1, 0), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (0, 6), (-1, 3), (-3, 2), (-1, 2), (-1, 0), (1, 0)
2. Usa Excel para formar una matriz con esos pares ordenados. Usa el Scatter Plot para unir los puntos.
3. Lleva a cabo cuatro transformaciones de la figura que obtuviste en el paso 2 usando las operaciones de matrices que aprendiste en la actividad ***Los cambios del cinco*** y usando el programa Excel.
4. Construye la gráfica de cada una de las transformaciones en EXCEL.
5. Selecciona una persona de tu grupo para que explique a todos los participantes las transformaciones que llevó a cabo tu grupo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ -1 & 3 \\ -3 & 2 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 3 \\ -3 & 1 \\ -6 & 0 \\ -3 & -1 \\ -2 & -3 \\ -2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Elementos de trigonometría

Objetivos: **Presentar en forma constructivista la definición de las funciones trigonométricas clásicas de ángulos e introducir su versión moderna como funciones de números reales. Establecer la equivalencia entre ambas.**

Materiales: **Regla, transportador**

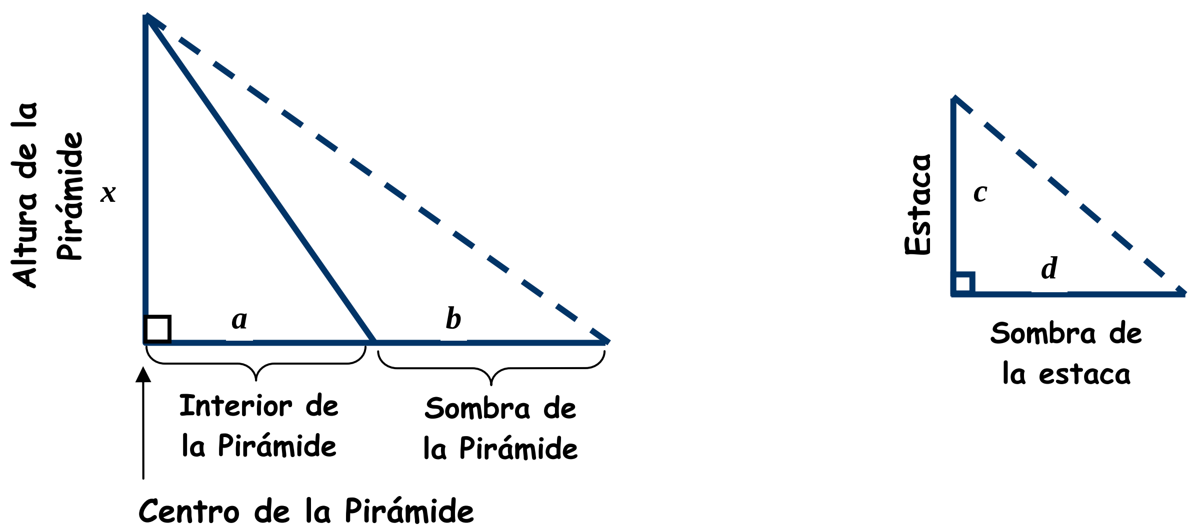
INTRODUCCIÓN

En el siglo sexto antes de Cristo, el matemático y filósofo Tales de Mileto viajó a Egipto. Una mañana los constructores de las pirámides le solicitaron si podía medir la altura de una de ellas. Tales tomó una estaca y la clavó verticalmente en la tierra. Luego, midió la altura de la estaca, su sombra y la sombra de la pirámide. Entró en la pirámide y midió la distancia desde su centro hasta el lado donde se proyectaba su sombra. Luego, llevó a cabo unos cómputos y les indicó la altura precisa de la pirámide.

Tales de Mileto fue uno de los siete sabios famosos de la antigüedad. Hoy día a nosotros nos parece muy simple lo que él hizo. Claro está, debido a la distancia del sol a la tierra, sus rayos llegan en rectas paralelas a distintos puntos cercanos entre sí. Entonces, si aplicamos las propiedades de triángulos semejantes podemos entender el procedimiento usado por Tales.

Sabemos que dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes. Si dos triángulos son semejantes, los lados correspondientes son proporcionales entre sí.

Las figuras siguientes explican la base del razonamiento de Tales.



(Figura 1)

La relación matemática:

$$\frac{x}{c} = \frac{a+b}{d}$$

$$\therefore \frac{x}{a+b} = \frac{c}{d} \qquad \textit{Altura de la Pirámide}$$

$$x = \frac{c(a+b)}{d}$$

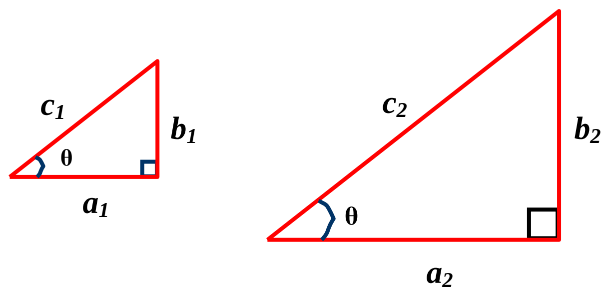
Medio siglo después de Tales de Mileto, aparece Pitágoras de Samos con sus estudios sobre las propiedades del triángulo rectángulo.

La trigonometría clásica tiene su base en las propiedades de los triángulos rectángulos semejantes.

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CLÁSICAS

Dos triángulos que tengan un ángulo agudo congruente son semejantes por definición. Por lo tanto sus lados correspondientes son proporcionales entre sí.

(Figura 2)



Esto es

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$a_1c_2 = a_2c_1$$

$$\therefore \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$$

Observa que:
a_1 = medida del lado adyacente al $\angle\theta$ en el triángulo rectángulo
b_1 = medida del lado opuesto al $\angle\theta$
c_1 = medida de la hipotenusa
La relación $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$ se puede resumir de la siguiente manera.

Para un ángulo agudo θ en cualquier triángulo rectángulo, ***la razón de la medida de su lado adyacente con la medida de la hipotenusa*** es la misma sin importar el tamaño del triángulo. A esta razón se le da el nombre de coseno de θ (se abrevia cos θ).

Regresando a la figura 2, observamos también que $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ de donde se obtiene que $\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}$.

Esta razón de la ***<u>medida del lado opuesto con la medida de la hipotenusa</u>*** se conoce como el seno de θ (abreviado sen θ).

Otra relación que se observa es

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2}$$ de donde se obtiene,

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

A esta razón de la medida del lado opuesto al $\angle\theta$ y el lado adyacente $\angle\theta$ se conoce como la tangente del $\angle\theta$ (abreviado tan θ).

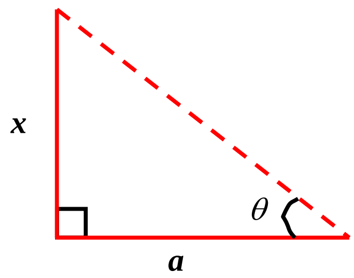
Como el triángulo tiene 3 lados se pueden formar 6 razones distintas entre sus lados.

Las otras 3 razones además de seno θ, coseno θ y tangente θ son:

			<u>Se abrevia:</u>
$\dfrac{\textit{medida hipotenusa}}{\textit{medida lado opuesto}}$	=	cosecante de θ =	csc θ
$\dfrac{\textit{medida hipotenusa}}{\textit{medida lado adyacente}}$	=	secante de θ =	sec θ
$\dfrac{\textit{medida adyacente}}{\textit{medida lado opuesto}}$	=	cotangente de θ =	cot θ

<u>Definición:</u> A las 6 razones de los lados de un triángulo rectángulo se les conoce como las funciones trigonométricas clásicas.

Observe que una vez se conocen los valores de las funciones trigonométricas para cada ángulo agudo θ, no es necesario usar semejanza de triángulos para resolver problemas como el de Tales de Mileto que citamos al inicio.



(Figura 3)

De acuerdo con la figura 3

$\tan \theta = \frac{x}{a}$

$\therefore x = a \tan \theta$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ARBITRARIOS

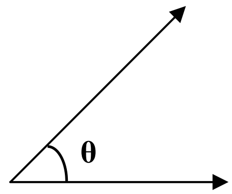
Las aplicaciones de las funciones trigonométricas son numerosas en los distintos oficios y profesiones. Por ejemplo: arquitectura, ingeniería, albañilería, carpintería, etc.

Hasta hace algunos años la trigonometría se enseñaba como un curso independiente. Hoy día se enseña integrada con cursos de álgebra y/o geometría. Su estudio es recomendado para estudiantes que tienen como meta continuar estudios universitarios.

Las funciones trigonométricas serán estudiadas en los cursos de pre-cálculo y cálculo desde una perspectiva diferente a como se definen con el triángulo rectángulo.

Una diferencia en estas definiciones es que en la trigonometría clásica solamente se pueden considerar ángulos agudos, esto es, ángulos cuya medida esté entre 0° y 90°. Para extender la definición a otros ángulos es necesario reconsiderar el concepto de ángulo.

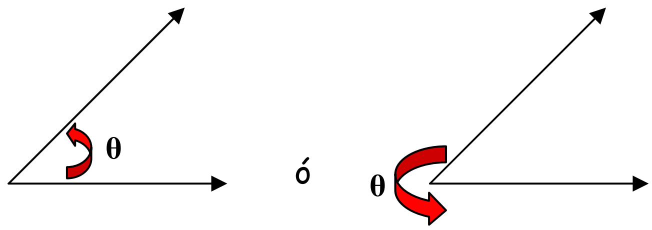
Corrientemente se nos define un ángulo como la abertura entre dos rayos cuyos puntos iniciales coinciden (Ver Figura 4).



ángulo θ

(Figura 4)

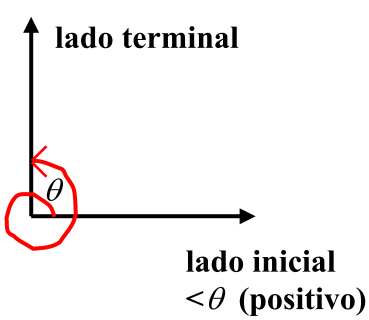
Esta definición es ambigua. ¿A cuál de las dos abertura se refiere? (Ver Figura 5)



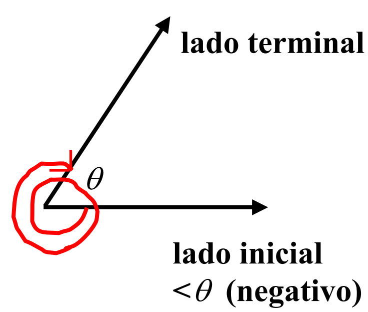
(Figura 5)

Además, dicha definición limitaría los ángulos a aquellos con medidas entre 0° y 360°. Una definición aceptada para el ángulo es el conjunto de puntos formado por dos rayos cuyos puntos iniciales coinciden. Sin embargo, esta definición no es operacional para propósitos prácticos y teóricos. Una forma aceptada para el concepto de ángulo es la siguiente:

Considere un rayo fijo y un segundo rayo que coincide con el anterior. Si rotamos este segundo rayo alrededor del punto inicial generamos un ángulo. Si la rotación es contraria a las manecillas del reloj, se genera un ángulo positivo; si es a favor de las manecillas del reloj, se genera un ángulo negativo. El punto inicial es el vértice, el rayo fijo es el lado inicial del ángulo. El rayo que gira, al completar la rotación se convierte en el lado terminal del ángulo. (Ver Figura 6).



(Figura 6a)



(Figura 6b)

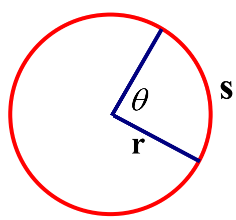
La Figura 6a muestra un ángulo positivo y la Figura 6b un ángulo negativo.

Existen diferentes sistemas de medidas para los ángulos. En las calculadoras, normalmente, aparecen tres unidades de medidas a saber.

Unidad $\rightarrow$ Corresponde al ángulo que se genera a través de

- 1 grado = $\frac{1}{360}$ parte de una rotación completa
- 1"grad" = $\frac{1}{400}$ parte de una rotación completa
- 1 radian = rotar el radio de un círculo hasta que el arco sostenido por el ángulo central tenga igual longitud que el radio.

De esta definición de radián se puede deducir el siguiente resultado para la geometría del círculo: Considera un ángulo central θ en un círculo de radio **r** que sostiene un arco de largo **s**.



La medida del ángulo θ en radianes corresponde al número de radios que mide **s**, esto es, a la razón de **s** con **r**

$$\therefore m\angle\theta = \frac{s}{r} \text{ en radianes}$$

$$\therefore s = r \cdot m\angle\theta$$

la cual se escribe ordinariamente s = rθ. Esta ecuación es válida únicamente cuando el ángulo θ se mide en radianes.

En ciencias se considera que una ecuación está correctamente planteada cuando las unidades físicas de medidas coinciden en ambos lados de la ecuación. Luego, si **s** y **r** se miden con las mismas unidades, digamos centímetros, entonces θ no tendría una unidad física de medida. Así, radián no es una unidad física de medida. Una ecuación como $3\theta + 2 = 8$ es válida si θ está medido en radianes o representa un número. No es válida si θ está medido en grados. Su solución $\theta=2$ puede interpretarse válidamente como 2 radianes o simplemente el número real 2.

En la ecuación $s = r\theta$, si consideramos que el ángulo θ es uno de rotación completa, entonces s representaría la circunferencia del círculo cuyo valor conocemos ($2\pi r$). Por lo tanto, $2\pi r = \mathbf{r}\theta$ de dónde $\theta = 2\pi$, o sea que un ángulo de rotación completo mide 360 grados o 2π radianes.

Esto permite establecer la relación entre grados y radianes:

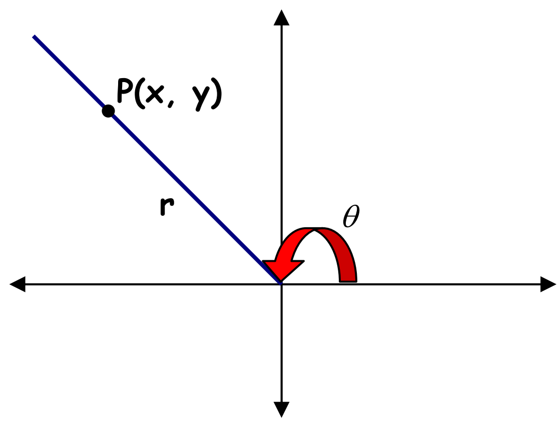
$$\boxed{\pi \textbf{ radianes = 180 grados}}$$

Esta conversión es importante ya que en la práctica ordinaria se usa la medida de grados mientras que en la teoría, tanto en matemática como en ciencia, se usa el radián.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ARBITRARIOS

Decimos que un ángulo está en posición ordinaria o estándar cuando su vértice es el origen de un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas y su lado inicial es la parte positiva del eje de abscisas. Dos ángulos cuyos lados terminales coinciden, se conocen como ángulos coterminales. Luego, la medida de dos ángulos coterminales difieren en múltiplos de 360° si está medido en grados o múltiplos de 2π si la medida es en radianes.

Considere un $\angle\theta$ en posición estándar y un punto **P** distinto del origen en su lado terminal. Sean (x, y) las coordenadas de **P**, y **r** la distancia desde el origen a **P** (Figura 7).



(Figura 7)

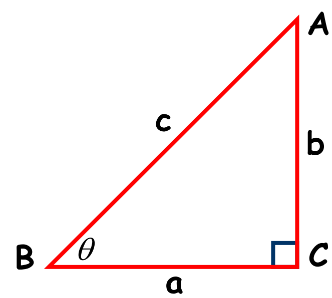
Se definen las funciones trigonométricas de θ mediante

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

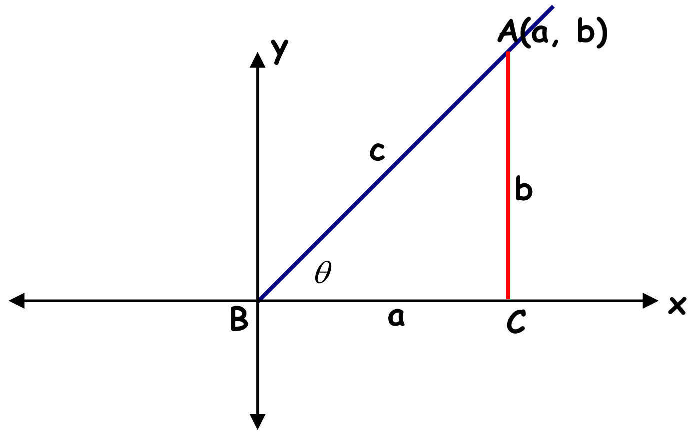
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Observe que la definición de las funciones trigonométricas clásicas para el triángulo rectángulo es un caso particular de ésta. Si retenemos un ángulo θ en un triángulo rectángulo



y colocamos los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas como se indica en la Figura 8.

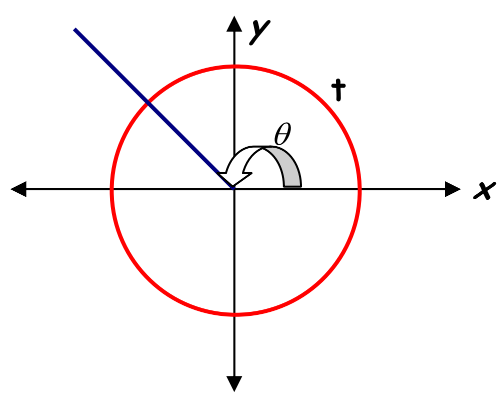


(Figura 8)

Entonces el ángulo θ queda en posición estándar, el vértice **A** se convierte en un punto en el lado terminal de θ, las coordenadas de **A** son (a, b) y la hipotenusa c se convierte en la distancia r del origen a **A**. Vemos entonces que las definiciones de las funciones trigonométricas de θ coinciden en este caso particular para el triángulo rectángulo como para el ángulo en posición estándar.

Estas versiones de las funciones trigonométricas nos permiten trabajar con ellas en sus aplicaciones prácticas. Sin embargo, en los cursos de matemáticas teóricas a nivel universitario comenzando con pre-cálculo, es necesario definirlas de otra manera. En vez de funciones que se aplican a ángulos se necesita que se apliquen a números. Aunque a nivel de escuela superior estudiamos la trigonometría desde la perspectiva de ángulos, introducimos brevemente cómo se presenta en pre-cálculo.

Para comenzar, considere un ángulo central θ medido en radianes y un círculo unitario (de radio 1) con centro en el origen. Sea ***t*** el largo del arco que genera el ángulo θ en el círculo

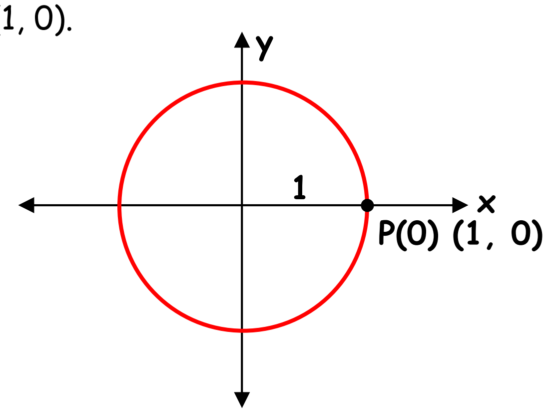


Sabemos que $t = r\theta$ si $m\angle\theta$ es en radianes, $\therefore$ numéricamente $t = \theta$.

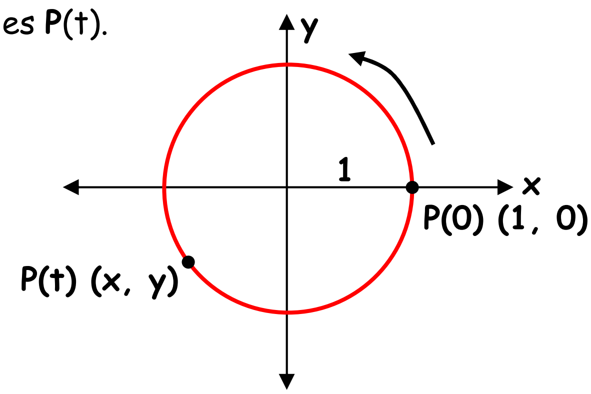
Luego, las funciones trigonométricas definidas para un ángulo θ (medido en radianes) se pueden interpretar como funciones de un número real ***t***. En pre-cálculo se introduce este mismo concepto, pero sin hablar de ángulo, esto es, mencionando solamente los números. Se logra de la manera siguiente:

> Dado un número real ***t***, se le hace corresponder un punto sobre el círculo, **P**(t) llamado el punto trigonométrico **P**(t) de acuerdo a la regla siguiente.

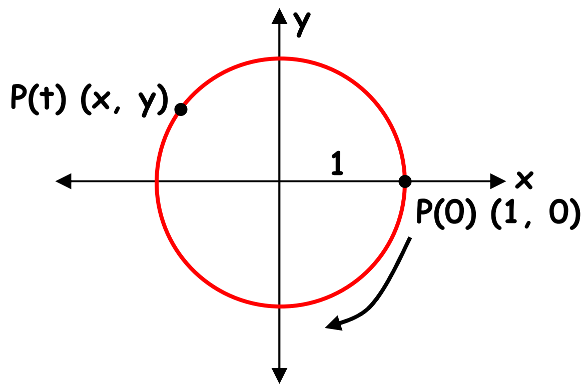
a) si t = 0, **P**(0) es el punto sobre el círculo unitario donde la parte positiva del eje de abscisa toca al círculo. Sus coordenadas son (1, 0).



b) Si t > 0, comenzando en **P**(0) mida un arco alrededor del círculo, contra las manecillas del reloj, de t unidades. El punto final es **P**(t).



c) Si $t < 0$, comenzando en **P**(0), mida un arco alrededor del círculo, a favor de las manecillas del reloj de largo $|t|$ unidades. El punto final es **P**(t).



Luego, a cada número real **t** se le hace corresponder una particular combinación de las coordenadas (x, y) del punto trigonométrico **P**(t). Cada una de estas asignaciones define una función que se conoce como las funciones circulares. En realidad corresponden a las funciones trigonométricas y por eso se usan sus mismos nombres para designarlas.

Definición: Dado un número real ***t***,

$\operatorname{sen} t = y$, ordenada de P(t)	$\csc t = \dfrac{1}{y}$
$\cos t = x$, abscisa de P(t)	$\sec t = \dfrac{1}{x}$
$\tan t = \dfrac{y}{x}$	$\cot t = \dfrac{x}{y}$

Vea que estas definiciones corresponden a las de un ángulo θ en posición estándar donde el punto **P** en el lado terminal se escoge a distancia r = 1 del origen.

ACTIVIDAD MIDIENDO Y CONSTRUYENDO

Objetivo: **Explorar el dominio de las destrezas de medición y construcción de segmentos y ángulos que tiene el estudiante.**

PROCEDIMIENTO

1. Esta actividad se trabajará individualmente.
2. Como introducción, repase a su discreción los conceptos de ángulos, sistemas de medidas de ángulos y otros datos históricos, destacando la justificación del estudio de la trigonometría. NO incluya las funciones trigonométricas.
3. A su discreción, explique la forma correcta de usar la regla y el transportador.

ACTIVIDAD RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Objetivo: **El estudiante describirá la definición de las funciones trigonométricas clásicas usando el triángulo rectángulo.**

PROCEDIMIENTO

1. Divida la clase en grupos de 3 o más estudiantes.
2. Verifique que el estudiante domine el vocabulario relacionado con el triángulo rectángulo. En esta actividad el estudiante trabajará individualmente las partes A, B y C. Al completar los triángulos cada cual debe utilizar medidas diferentes. El resto de la actividad se trabaja en grupo.

   Es importante que se destaque que los **resultados obtenidos por el grupo en la parte D, cuando el triángulo es rectángulo, deben ser los mismos**.

Mientras que en el triángulo NO rectángulo los resultados son diferentes. Se debe discutir porque esto ocurre. La razón es que todos los triángulos rectángulos construidos con el mismo $\angle\theta$ son semejantes, por lo que las razones de sus lados correspondientes son iguales. Esto no ocurre con los otros triángulos construidos.

RESPUESTAS

Pregunta 3: Para un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo

senθ = la razón de las medidas del lado opuesto a θ con la hipotenusa

cosθ = la razón de las medidas del lado adyacente a θ con la hipotenusa

tanθ = la razón de las medidas del lado opuesto a θ con el adyacente

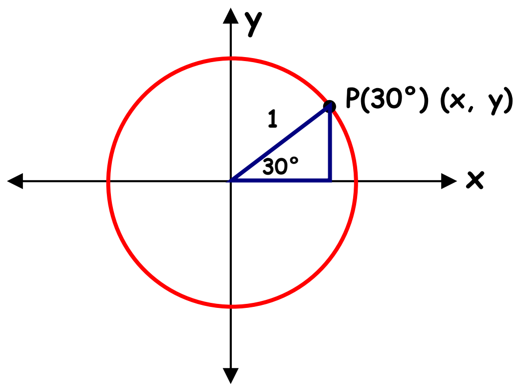
ACTIVIDAD RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL CÍRCULO

Objetivo: **Se introducirá el concepto el círculo unitario para generalizar las funciones trigonométricas para cualquier ángulo.**

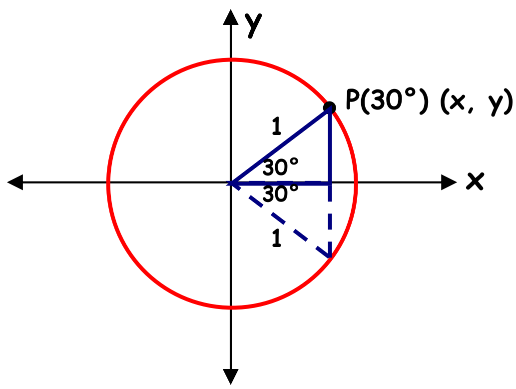
PROCEDIMIENTO

1. Divida la clase en grupos de 3 ó más estudiantes.
2. Discuta con toda la clase las preguntas 1 y 2.
3. Luego, introduzca el concepto de ángulo en posición estándar; cómo asociar con cada ángulo θ en posición estándar, el punto P(θ) donde el lado terminal intercepta el círculo unitario. Explique que en la pregunta 3 hay que hallar las coordenadas exactas de P(θ) para algunos ángulos θ. Se proveen las correspondientes cuando θ = 0° y θ = 30°. Una explicación sobre cómo hallar las de 30° usando argumentos geométricos puede ser la siguiente:

Presente el dibujo



Complete la figura como se indica con las líneas de puntos para formar un triángulo equilátero.



Como el eje positivo de ***x*** es una mediatriz del triángulo equilátero, y = $\frac{1}{2}$. De la ecuación del círculo unitario (o por Teorema de Pitágoras).

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ coordenadas de P(30°) son $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Explique que usando argumentos geométricos se completará la tabla 3. Para contestar la pregunta 5, los resultados obtenidos en la tabla de la pregunta 3 deben estar en forma decimal. Pida que trabajen la actividad.

RESPUESTAS

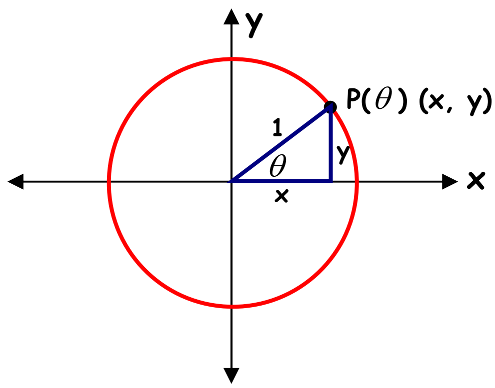
1. Un círculo es la curva que describe un punto que se mueve en el plano equidistante de un punto fijo.
2. $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

3.

θ	**(x, y)**
0°	(1, 0)
90°	(0, 1)
180°	(-1, 0)
270°	(0, -1)
30°	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
45°	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
60°	$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
120°	$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
135°	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
210°	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$
240°	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
300°	$\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
315°	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. **Definición**
   cosθ = la abscisa de P(θ) en el círculo unitario
   senθ = la ordenada de P(θ) en el círculo unitario

7. No. En el caso de que un ángulo θ sea agudo, θ en posición estándar queda en el primer cuadrante, luego sus coordenadas ***x***, ***y*** corresponden exactamente al lado adyacente y lado opuesto de θ en el triángulo (ver figura), la hipotenusa es igual a 1.



8. $\frac{x}{3}$ = cos 60° | $\frac{y}{3}$ = sen 60° | coordenadas $\left(\frac{3^{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$ | $\frac{y}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{3}{2}$ | $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

ACTIVIDAD UN VIAJE EN LA ESTRELLA

PROCEDIMIENTO

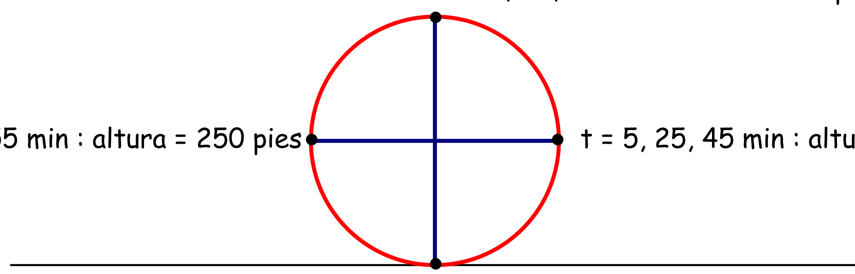
1. Divida la clase en grupos de 3 o más estudiantes.
2. Lea la primera página de la actividad y explique que para contestar las preguntas pueden asumir que
   a. Cada cápsula representa un punto en el borde del círculo que representa la estrella.

b. Al girar la estrella cada cápsula recorre ángulos iguales en intervalos de tiempos iguales en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj.
c. Cuando ***t*** = 0, se monta en la cápsula que está al nivel de la tierra, ***A***=0.

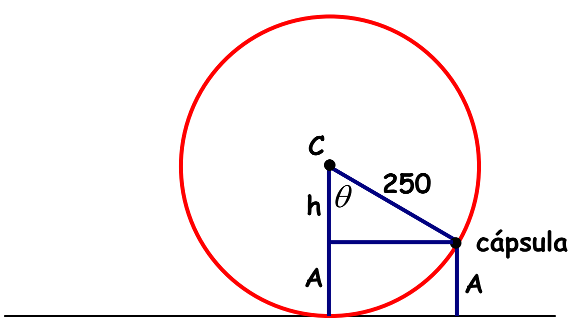
3. A su discreción, puede sugerir como una ayuda, que consideren el ángulo θ que se genera, cuyo lado inicial es el radio desde el centro al piso y lado terminal es el radio desde el centro a la cápsula.
4. Pida que trabajen la actividad.

RESPUESTAS

Para construir la tabla, observe que si tarda 20 minutos en completar una rotación, gira a razón de 18 grados/minuto. Para hallar la altura ***A*** en los tiempos indicados, cada 5 minutos gira un ángulo de 90°.



Otra forma de resolver, es hallar la fórmula para la altura de la cápsula en cualquier instante ***t***. No se espera que los estudiantes lo hagan así. Vea la figura siguiente y las ecuaciones correspondientes.



La estrella gira contra las manecillas del reloj y la cápsula genera el ángulo θ indicado con θ = 18t

$$250 = A + h$$
$$= A + 250\cos\theta$$
$$\therefore\ A = 250 - 250\cos\theta$$

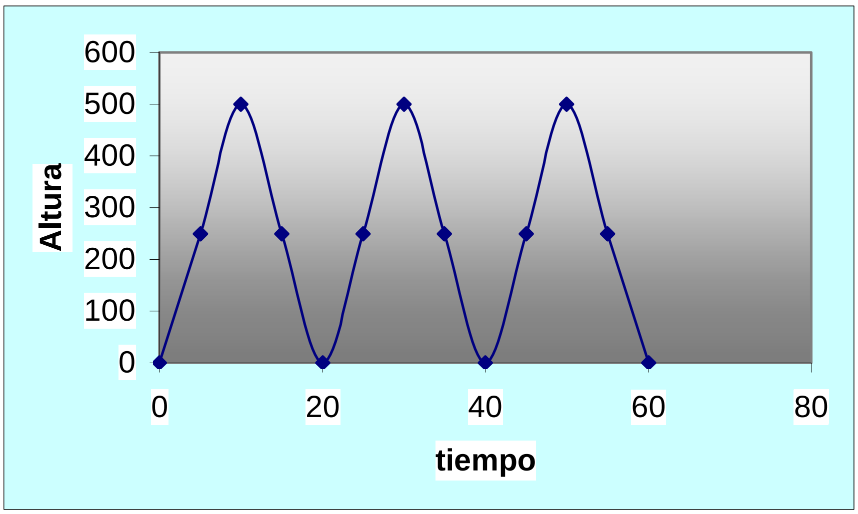
o sea $\boxed{A = 250 - 250\cos 18t}$

sustituyendo los valores de ***t*** se obtiene ***A***.

Pregunta 2: En la tabla.

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
A	0	250	500	250	0	250	500	250	0	250	500	250	0

Localización de los puntos
(se indica la forma correcta de la gráfica en línea entrecortada)



Pregunta 3: Sí, ya que la estrella gira continuamente y la cápsula va alcanzando todas las Alturas entre 0 y 500 pies.

Pregunta 4: No, el movimiento no es lineal.

Pregunta 5: El eje horizontal representa el tiempo ***t*** en minutos.

Pregunta 6: El eje vertical representa la altura en pies.

Pregunta 7: La gráfica se repite cada 20 minutos.

Pregunta 8: Como 375 pies. El valor exacto es $\boldsymbol{A} = 250 - 250\cos 126° = 396.95$ pies

ACTIVIDAD VIAJE EN LA ESTRELLA II

PROCEDIMIENTO

1. Divida la clase en grupos de 3 estudiantes.
2. Muestre a los estudiantes la forma correcta de unir los puntos en la actividad anterior: una curva sinusoidal. Pida que lleven a cabo la actividad.

RESPUESTAS

Gráfica A.
1. 20 pies
2. 4 minutos, ya que tarda 5 minutos en completar $1\frac{1}{4}$ vuelta.
3. 40 pies
4. 20 pies, si el tiempo se cuenta desde que empezó a girar.
5. 9 minutos

Gráfica B.
1. 20 pies
2. 4 minutos, ya que tarda 7 minutos en completar $1\frac{3}{4}$ vueltas.
3. 30 pies
4. 20 pies, si el tiempo se cuenta desde que empezó a guiar.
5. 9 minutos

Pregunta 6: la B

ACTIVIDAD LA PUERTA GIRATORIA

PROCEDIMIENTO

1. La actividad es individual.
2. Distribuya la actividad y conceda 15 minutos para contestarla.

RESPUESTAS

1. 120 grados
2. 60 grados en contra
   300 grados a favor
3. Si gira contra las manecillas del reloj da 10 vueltas y en la próxima lo detienen en **B**. Si es a favor de las manecillas, da 10 vueltas y lo detienen en **D**.

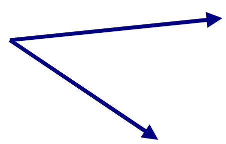
ACTIVIDAD MIDIENDO Y CONSTRUYENDO

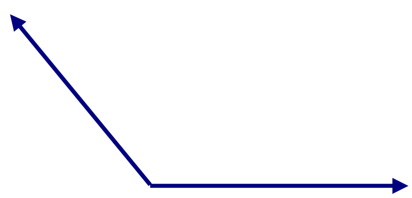
A. Mide los segmentos siguientes, en centímetros, a un sitio decimal de precisión.

1.

2.

B. Mide, en grados, los ángulos siguientes.

1. 

2. 

C. Construye

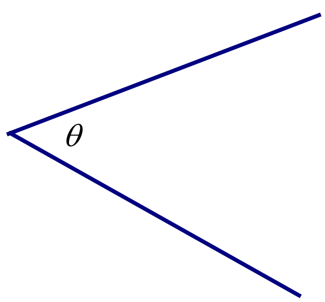
1. Un ángulo que mida 78°

2. Un triángulo rectángulo con catetos de 6 cm y 8 cm

ACTIVIDAD RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

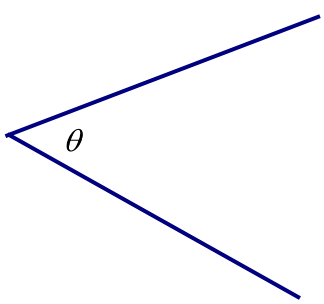
Las figuras siguientes ilustran un ángulo θ. Construye los triángulos indicados extendiendo, a tu discreción, los lados del ángulo. Luego, mide, en centímetros, los lados del triángulo y completa la información solicitada. Con la información llena la tabla que se provee en la parte C.

A. Completa un triángulo rectángulo



medida de $\angle\theta$ ______
lado adyacente a $\angle\theta$ ______
lado opuesto a $\angle\theta$ ______
tercer lado ______

B. Completa un triángulo <u>NO</u> rectángulo



medida de $\angle\theta$ ______
lado adyacente a $\angle\theta$ ______
lado opuesto a $\angle\theta$ ______
tercer lado ______

C. Llena la tabla siguiente:

Triángulo	**m**$\angle\theta$	$\dfrac{adyacente}{3^{er}\ lado}$	$\dfrac{opuesto}{3^{er}\ lado}$	$\dfrac{opuesto}{adyacente}$
Rectángulo				
No Rectángulo				

D. Tabla para resumir información del grupo.

		Opuesto / **3^r lado**		**Adyacente** / **3^r lado**		**Opuesto** / **adyacente**	
	m$\angle\theta$	**Δrectángulo**	**Δ no rectángulo**	**Δrectángulo**	**Δ no rectángulo**	**Δrectángulo**	**Δ no rectángulo**
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

E. Usa la calculadora para hallar: (Recuerda colocarla en el modo de grado)

sen θ =
cos θ =
tan θ =

Compara estos resultados con los resultados en la tabla. ¿Qué observas?

F. Contesta las preguntas siguientes:

1. Observa y describe los resultados obtenidos, resumidos en la tabla, para el triángulo rectángulo y el triángulo no rectángulo.

2. Compara los valores obtenidos, con la calculadora, para sen θ, cos θ y tanθ con los resultados en la tabla. ¿Qué observas?

3. Escribe una definición usando el triángulo rectángulo para un ángulo agudo θ:

sen θ ____

____

____

cos θ ____

____

____

tan θ ____

____

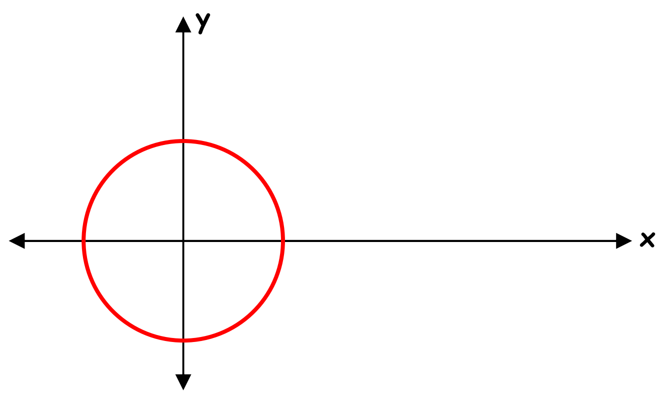
____

ACTIVIDAD RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL CÍRCULO

1. ¿Cuál es la definición de un círculo?

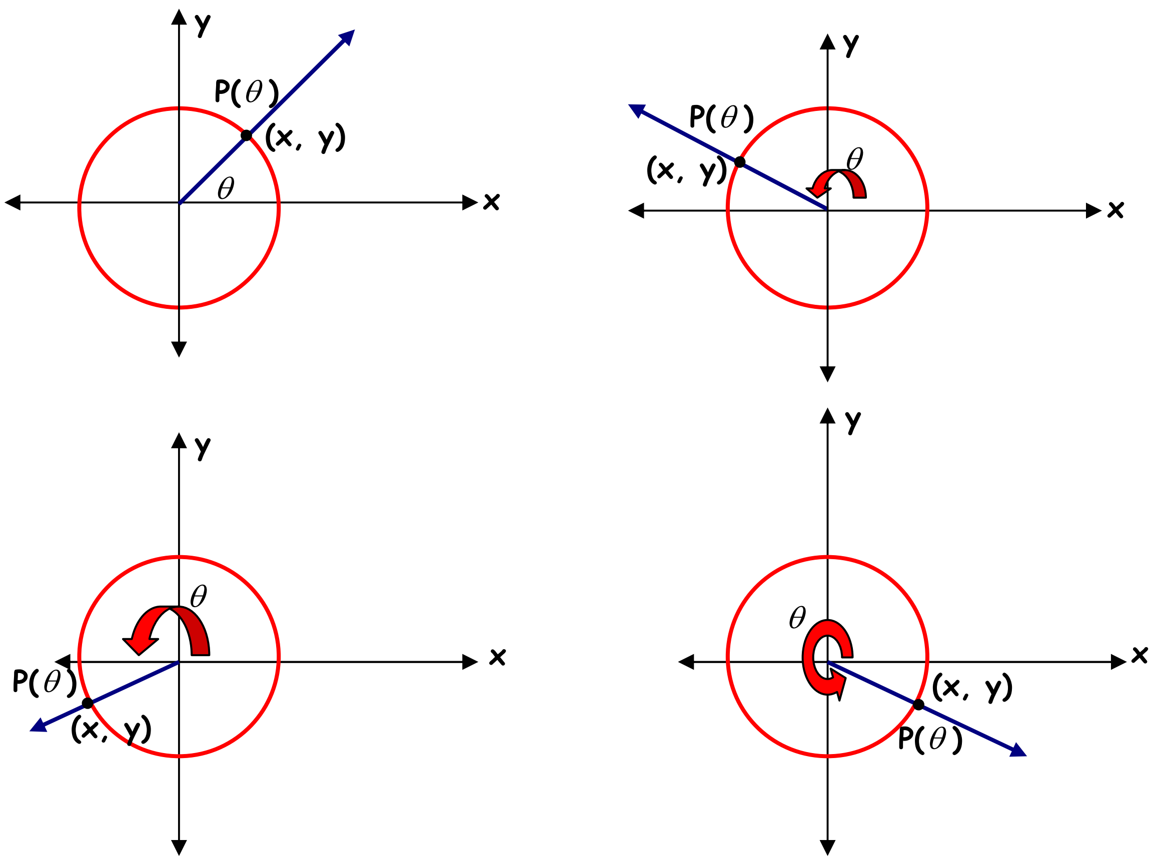
2. ¿Cuál es la ecuación de un círculo con centro en **C**(h, k) y radio ***r***?

   a. Si colocamos un círculo con radio 1 en un plano cartesiano con su centro en el origen.



   b. La ecuación del círculo es: ___________________________

Considera el punto de intersección del círculo y el lado terminal del ángulo. Es decir, podemos asociar con cada ángulo θ dado un punto **P**(θ) del círculo unitario como muestra la figura siguiente:



3. Llena la tabla con las coordenadas (x, y) de los puntos asociados con los ángulos indicados.

θ	**(x, y)**
0°	(1, 0)
90°	( )
180°	( )
270°	( )
30°	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
45°	
60°	
120°	
135°	
210°	
240°	
300°	
315°	

4. Usando una calculadora completa la tabla siguiente:

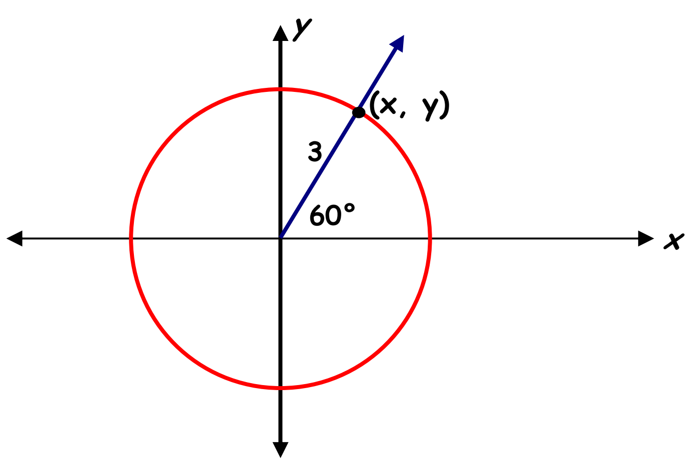
θ	**Sen** θ	**Cos** θ
0°		
90°		
180°		
270°		
30°		
45°		
60°		
120°		
135°		
210°		
240°		
300°		
315°		

5. ¿Qué relación hay entre ambas tablas?

6. A la luz de este ejercicio define cos θ y sen θ.

7. En la actividad ***Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo***, definimos cos θ y sen θ. ¿Se contradice esa definición con la que acabamos de obtener?

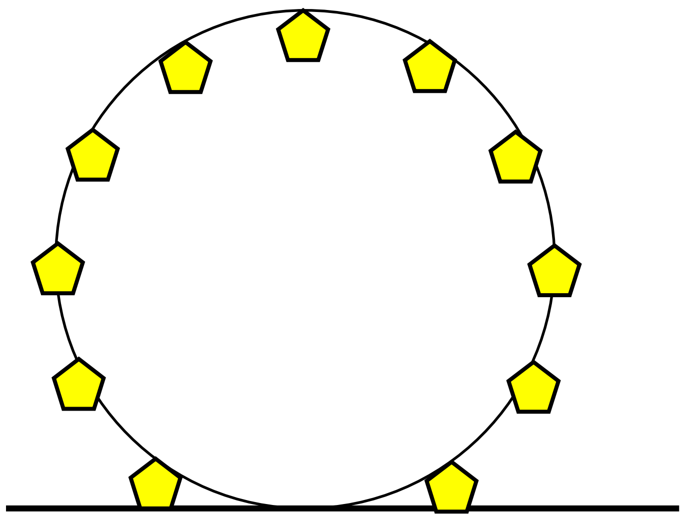
8. La figura siguiente muestra un círculo de radio 3 unidades y un ángulo de 60°. ¿Cuáles son las coordenadas de (***x, y***)?



ACTIVIDAD UN VIAJE A LAS ESTRELLAS

En Inglaterra se construyó una estrella giratoria como la que se muestra a continuación cuyo diámetro mide 500 pies con una capacidad para llevar a 1,400 personas en 60 cápsulas. La rueda gira continuamente en contra de las manecillas del reloj logrando una rotación cada 20 minutos.

La figura siguiente muestra una estrella giratoria simplificada.



Decides montarte y dar tres vueltas completas. Sea **A** la altura sobre la tierra a la cual te encuentras en cualquier momento. Si **t** representa el tiempo en minutos, completa la tabla siguiente:

t	A
0	0
5	
10	
15	
20	
25	
30	
35	
40	
45	
50	
55	
60	

1. Explica cómo obtuviste los valores para **A**.
2. Localiza los puntos de la tabla en un plano cartesiano.
3. ¿Se pueden unir los puntos? Explica.
4. Si se unen los puntos, ¿son líneas rectas? ¿Porqué?
5. ¿Qué representa el eje horizontal?
6. ¿Qué representa el eje vertical?
7. ¿Cada cuánto se repite la gráfica?
8. Estima la altura a la que se encuentra una persona a los 7 minutos.

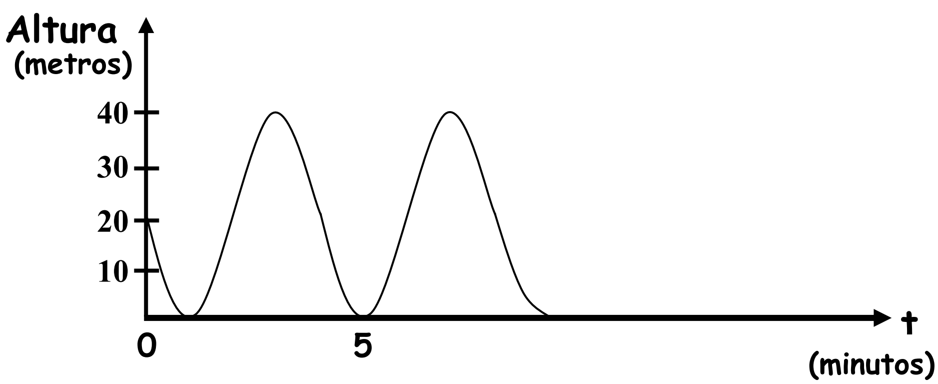
ACTIVIDAD VIAJE EN LA ESTRELLA II

Las gráficas siguientes describen la altura **A** (en metros) a la que uno se encuentra sobre la tierra si uno está en una estrella giratoria que gira en contra de las manecillas del reloj con movimiento uniforme.

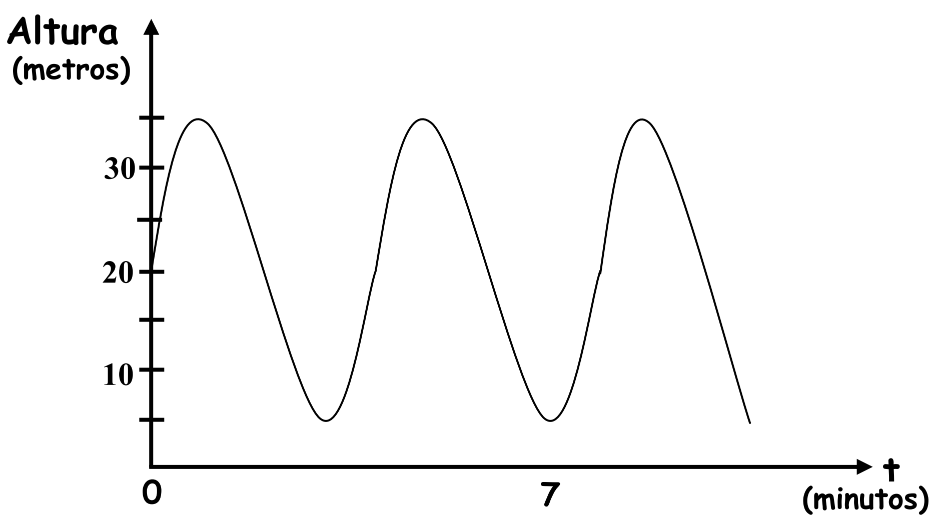
Para cada una de las gráficas siguientes determina:

1. La posición inicial cuando **t** = 0.
2. ¿Cuánto le toma a la estrella dar una vuelta completa?
3. El diámetro de la estrella.
4. ¿A qué altura sobre la tierra uno se sube en la estrella?
5. ¿Cuánto tiempo estuvo en la estrella?
6. ¿Cuál de las gráficas representa mejor una estrella giratoria?

A)

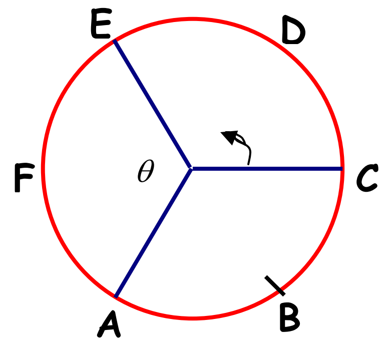


B)



ACTIVIDAD LA PUERTA GIRATORIA

Un hotel tiene una puerta circular que rota con tres paneles de cristales. Cada panel mide un metro de ancho y separa la puerta en tres compartimientos del mismo tamaño como muestra la figura. Observa que **A**, **B**, **C**, **D**, **E** y **F** son puntos distribuidos equitativamente.



1. ¿Cuál es la medida de θ?

2. ¿Qué ángulo se forma si el panel se mueve de C a D, en contra de las manecillas del reloj? ¿Y a favor?

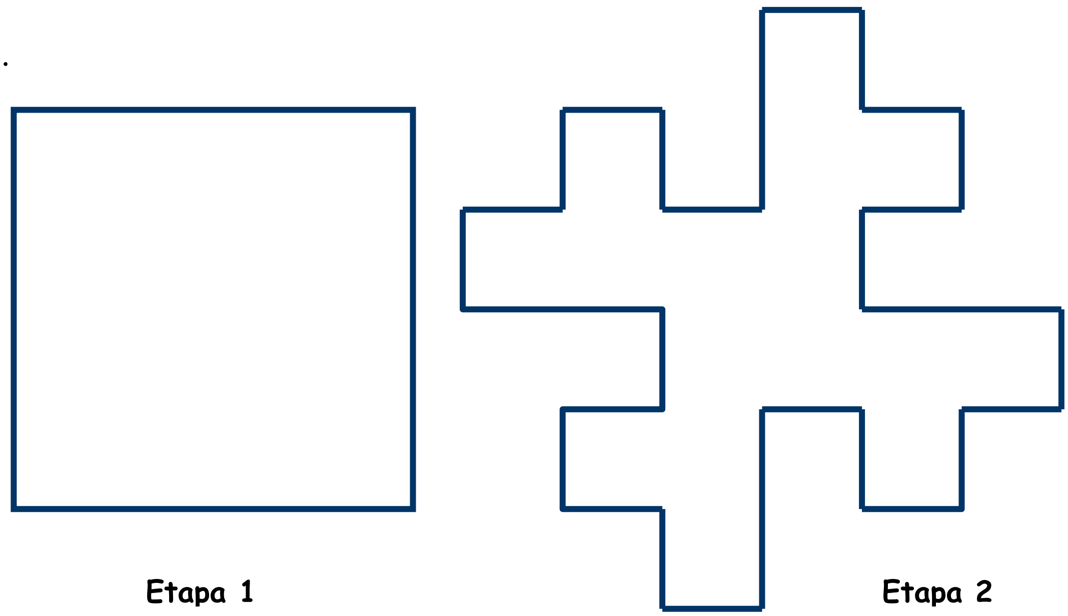
3. Un niño que está jugando en la puerta comienza a dar vueltas desde **C** hasta alcanzar un ángulo de 3900°, que es cuando su padre lo detiene. Describe el movimiento de la puerta.

Geometría fractal

ACTIVIDAD A

RESPUESTAS

1.



Etapa 1 **Etapa 2**

a. En cada parte que corresponde a un lado del cuadrado original hay 8 segmentos.

b. Cada segmento mide $\frac{1}{4}$ del segmento original = $\frac{1}{4}$ un

c. El perímetro de la figura resultante es $\frac{1}{4} \times 8 \times 4 = 8$ un

longitud del segmento

lados de un cuadrado

cantidad de segmentos en un lado

Para construir fácilmente las figuras en las etapas 2 y subsiguientes

Para sustituir un segmento ——— por el generador  , en cada

etapa representaremos simbólicamente los movimientos siguientes por la letra indicada. Se entiende que cada movimiento produce un segmento cuya longitud es $\frac{1}{4}$ parte del segmento que sustituye.

F: continuar moviéndose en la misma dirección
D: doblar 90° a la derecha y moverse
I: doblar 90° a la izquierda y moverse

Entonces, comenzando en el punto inicial del segmento que se sustituye, el generador se obtiene simbólicamente mediante

F D I I F D D I

2.

ETAPAS	Segmentos en cada lado	Longitud del segmento (en un)	Perímetro de la curva (en un)
1	1	1	$4 = 2^2$
2	$8 = 8^1$	$\frac{1}{4}$	$4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{4} = 8 = 4 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2 = 2^3$
3	$8 \cdot 8 = 8^2$	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^2}$	$4 \cdot 8^2 \cdot \frac{1}{4^2} = 16 = 4 \cdot 4 = 2^2 \cdot 2^2 = 2^4$
4	$8^2(8) = 8^3$	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}\right) = \frac{1}{4^3}$	$4 \cdot 8^3 \cdot \frac{1}{4^3} = 32 = 4 \cdot 8 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^5$
5	$8^3(8) = 8^4$	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^3}\right) = \frac{1}{4^4}$	$4 \cdot 8^4 \cdot \frac{1}{4^4} = 64 = 4 \cdot 16 = 2^2 \cdot 2^4 = 2^6$
6	$8^4(8) = 8^5$	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^4}\right) = \frac{1}{4^5}$	$4 \cdot 8^5 \cdot \frac{1}{4^5} = 128 = 4 \cdot 32 = 2^2 \cdot 2^5 = 2^7$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$8^{n-1} = 2^{3(n-1)}$	$\frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{2^{2(n-1)}}$	$4 \cdot 2^{3(n-1)} \cdot \frac{1}{2^{2(n-1)}} = 2^{n+1}$

3. Una fórmula para hallar el perímetro de la figura en la iteración ***n*** es: $P_n = 2^{n+1}$

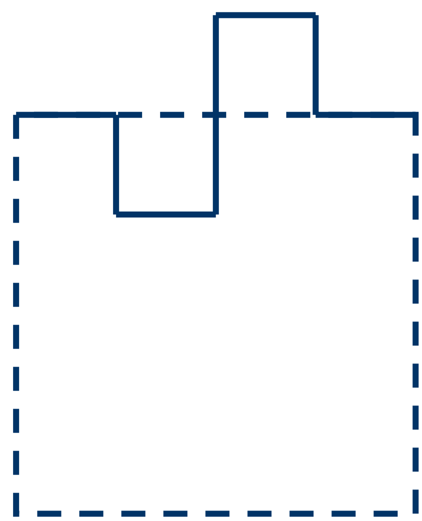
4. El perímetro en la etapa 20 es: $P_{20} = 2^{20+1} = 2^{21} = 2{,}097{,}152$ un

5. El perímetro de la figura parece aproximarse a infinito. Si $n \to \infty$, entonces $P \to \infty$.

6. Área etapa 1 = 1 un²
   Área etapa 2 = 1 un²
   Área etapa 3 = 1 un²

Observe lo que le ocurre al área de la figura en una etapa cuando sustituimos un segmento por el generador. Como lo mismo sucede para cada parte de la figura, lo ilustraremos al ir de la etapa 1 a la etapa 2. La etapa 1 la mostramos en líneas entrecortadas y solamente sustituimos un lado por su generador.

Etapa 1

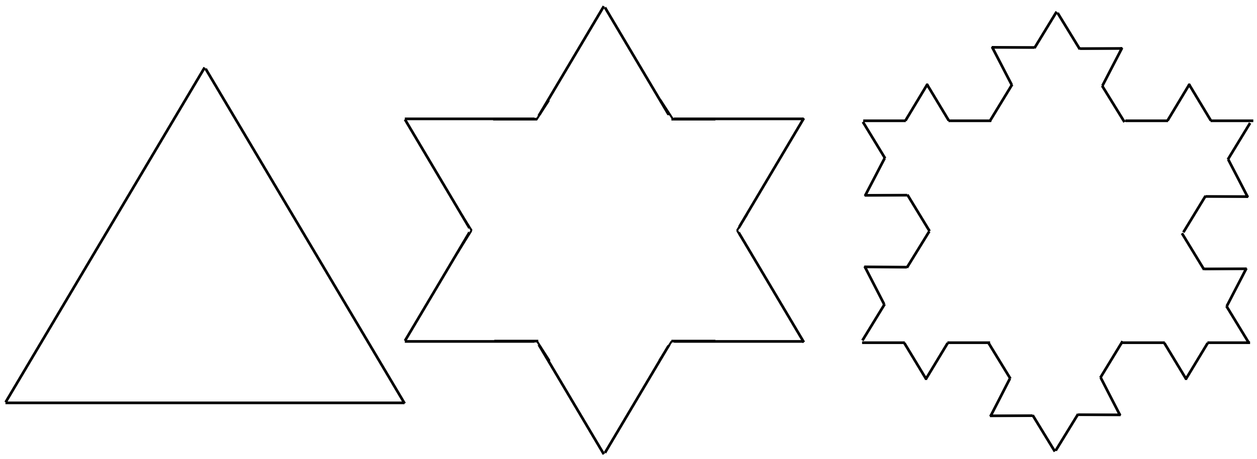


Etapa 2

Observe que al sustituir un segmento por el generador, el área de la región que se pierde es igual al área de la nueva región que se incluye. El área de la nueva figura es la misma que el área de la figura anterior. Tenemos, que al terminar el proceso de construcción del fractal, la figura obtenida será una curva simple cerrada de perímetro infinito pero cuya área es 1 un².

ACTIVIDAD B

RESPUESTAS



Etapa 1 **Etapa 2** **Etapa 3**

1.

ETAPAS	Segmentos en cada lado	Longitud del segmento (en un)	Perímetro de la curva (en un)
1	$1 = 4^0$	$1 = \frac{1}{3^0}$	3
2	$4 = 4 \cdot 1 = 4^1$	$\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$	$3\left[4\left(\frac{1}{3}\right)\right] = 3\left(\frac{4}{3}\right)$
3	$16 = 4 \cdot 4 = 4^2$	$\frac{1}{9} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^2}$	$3\left[4^2\left(\frac{1}{3^2}\right)\right] = 3\left(\frac{4}{3}\right)^2$
4	$64 = 4^2 \cdot 4 = 4^3$	$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$	$3\left[4^3\left(\frac{1}{3^3}\right)\right] = 3\left(\frac{4}{3}\right)^3$
5	$256 = 4^3 \cdot 4 = 4^4$	$\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4}$	$3\left[4^4\left(\frac{1}{3^4}\right)\right] = 3\left(\frac{4}{3}\right)^4$
6	$1024 = 4^4 \cdot 4 = 4^5$	$\frac{1}{243} = \frac{1}{3^5}$	$3\left[4^5\left(\frac{1}{3^5}\right)\right] = 3\left(\frac{4}{3}\right)^5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	4^{n-1}	$\frac{1}{3^{n-1}}$	$3\left[4^{n-1}\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)\right] = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

2. Fórmula general para hallar el perímetro en cualquier etapa: $P_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

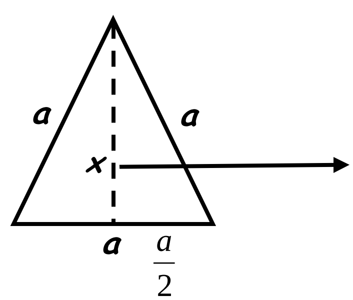
3. A medida que ***n*** aumenta el perímetro aumenta hacia infinito.
Si $n \to \infty$, entonces $P_n \to \infty$.

4.

ETAPAS	Número de nuevos triángulos	Longitud del lado del nuevo triángulo (en un)	Área de cada nuevo triángulo (en un)
1	1	1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
2	$3 = 3(4^0)$	$\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2$
3	$12 = 3(4)$	$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3^2}\right)^2$
4	$48 = 3(4^2)$	$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3^3}\right)^2$
5	$192 = 3(4^3)$	$\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3^4}\right)^2$
6	$768 = 3(4^4)$	$\frac{1}{243} = \frac{1}{3^5}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3^5}\right)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$3(4^{n-2})$	$\frac{1}{3^{n-1}}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)^2$

Para calcular el área de cada nuevo triángulo aplique la fórmula de área de un triángulo equilátero de lado ***a***

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$
$$= \frac{1}{2}(a)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



$$a^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = x$$
$$\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

A la tabla anterior se le debe añadir, al final, una columna para el área total de la figura (en un). El área total de la figura = área de la figura anterior + (número total de nuevos triángulos)(área nuevo triángulo). Para ver más detalles puede ir al documento de Matemática Integrada Nivel Superior, página 172.

5.

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$$

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right] + 3(4)\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3^2}\right)^2\right]$$

$$S_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right] + 3(4)\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3^2}\right)^2\right] + 3(4^2)\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3^3}\right)^2\right]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left[1 + \frac{4}{3^2} + \frac{4^2}{3^4} + \cdots + \frac{4^{n-2}}{3^{2(n-2)}}\right]$$

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left[1 + \frac{4}{3^2} + \frac{4^2}{3^4} + \cdots + \frac{4^{n-2}}{3^{2(n-2)}}\right]$$

Sea $B_n = 1 + \frac{4}{3^2} + \frac{4^2}{3^4} + \cdots + \frac{4^{n-2}}{3^{2(n-2)}}$

$$\frac{4}{3^2}B_n = \frac{4}{3^2} + \frac{4^2}{3^4} + \frac{4^3}{3^6} + \cdots + \frac{4^{n-1}}{3^{2(n-1)}}$$

$$B_n - \frac{4}{3^2}B_n = 1 - \frac{4^{n-1}}{3^{2(n-1)}}$$

$$B_n = \frac{1 - \frac{4^{n-1}}{3^{2(n-1)}}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}}$$

$$\therefore \quad A_{\substack{\text{total en}\\ \text{cualquier}\\ \text{etapa}}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}B_n$$

Observe que si $n \to \infty$, entonces $\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \to 0$

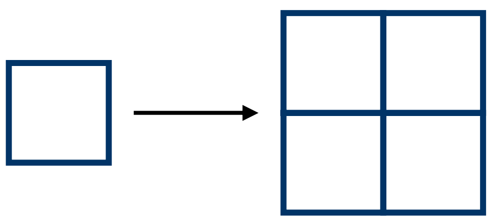
$\therefore$ Si $n \to \infty$, entonces $B_n \to \dfrac{1}{1-\frac{4}{9}} = \dfrac{1}{\frac{5}{9}} = \dfrac{9}{5}$

$$\therefore \quad A_{total} \to \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \bullet \frac{9}{5} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{9}{15}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{24}{15}\right] = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

Note que el área de la curva de Koch es $\frac{8}{5}$. El área del triángulo equilátero original es $\dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5} \bullet \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{8}{5}$

ACTIVIDAD C

RESPUESTAS

1. 

   Cuatro. Objetos autosimilares.

2. El tamaño del nuevo cuadrado es 4, y la longitud de cada lado del nuevo cuadrado es 2.

3. El factor de escala (**F**) se define como:

$$F = \frac{longitud\ nueva}{longitud\ original}$$

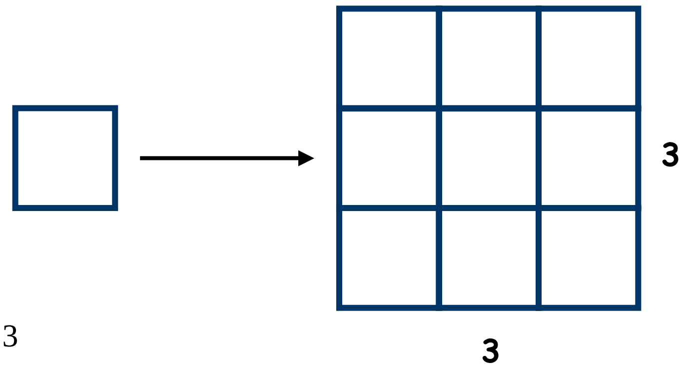
$\therefore$ el factor de escala entre el cuadrado grande y el pequeño es $F = \frac{2}{1} = 2$

4. La razón (**R**) se define como:

$$R = \frac{\textit{tamaño original}}{\textit{tamaño original}}$$

$\therefore$ la razón entre el cuadrado grande y el pequeño es $R = \frac{4}{1} = 4$

5.



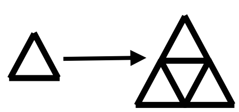
$$F = \frac{3}{1} = 3$$

$$R = \frac{9}{1} = 9$$

6.

Factor de escala (F)	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**. . .**	**10**
Razón (R) del tamaño nuevo al original	4	9	16	25	36	. . .	100

7. Posible respuesta: La razón corresponde al cuadrado del factor de escala.



Factor de escala (F)	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**. . .**	**10**
Razón (R) del tamaño nuevo al original	4	9	16	25	36	. . .	100

9. La dimensión fractal(**D**) se define como:

$$\left(factor\ de\ escala\right)^D = \frac{tamaño\ nuevo}{tamaño\ original} = R$$

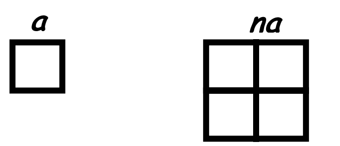
Cuadrado: $2^D = 4$ $\therefore$ $D = 2$

Triángulo: $2^D = 4$ $\therefore$ $D = 2$

Notas para las partes 5, 6 y 7

Para computar el tamaño de la figura tiene que hallar el número de réplicas que la forman, ésto es, cuántas veces cabe la figura original en la nueva.

En el caso del cuadrado



Área = a^2 **Área = n^2a^2**

$$Factor\ de\ escala = \frac{na}{a} = n$$

$$Tamaño = \frac{n^2a^2}{a^2} = n^2$$

¿Cuántas veces cabe el cuadrado pequeño en el cuadrado grande?

En el caso del triángulo equilátero

Área = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ **Área = $\frac{\sqrt{3}}{4}n^2a^2$**

$$Factor\ de\ escala = \frac{na}{a} = n$$

$$Tamaño = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}n^2a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = n^2$$

En estos casos, el tamaño se puede computar usando las áreas ya que se puede teselar la figura grande usando la pequeña.

DIMENSIÓN FRACTAL

Sabemos que:

Un punto tiene dimensión 0
Una recta tiene dimensión 1
El plano tiene dimensión 2
Una figura tridimensional tiene dimensión 3

El concepto de dimensión en la geometría Euclidea puede ser extendido a la geometría de fractales. Este nuevo concepto de dimensión fractal coincide con el tradicional cuando se aplica a objetos de la geometría que hemos estudiado.

Sin embargo, vamos a estudiar que la dimensión es una función de la escala. Comenzamos con un segmento.

Divida ese segmento en partes iguales, digamos cuatro segmentos iguales.

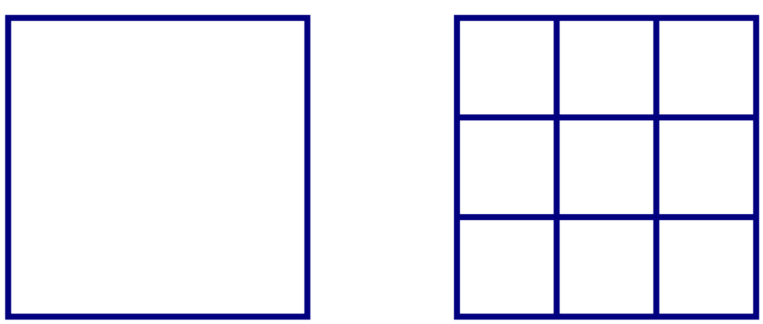
Cada uno de los 4 segmentos es geométricamente similar al segmento original. La dimensión relaciona el factor de escala con el número de objetos auto-similares. Es decir, el segmento lo dividimos en cuatro por lo tanto el factor de escala es 4, F = 4. Obtuvimos 4 objetos similares al original, es decir, N = 4. ¿Qué relación hay entre F y N?

$$F^D = N$$

$$4^1 = 4$$

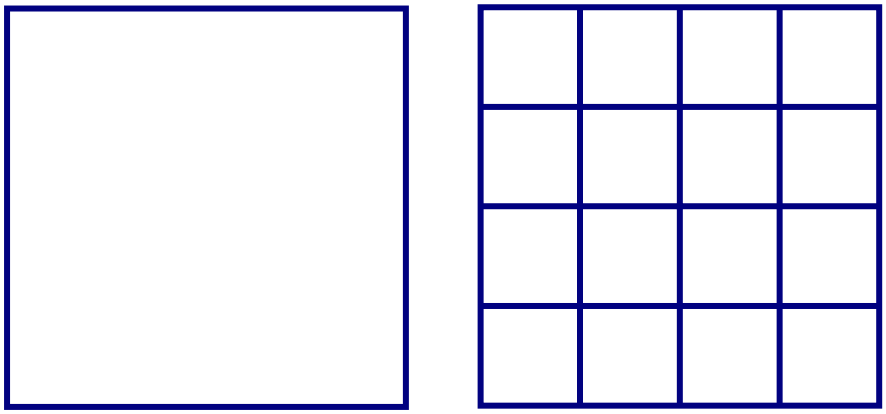
Por consiguiente decimos que la dimensión es 1.

Veamos un cuadrado.



El factor de escala $F = 3$ y los objetos auto-similares son $N = 9$. Por consiguiente, $3^D = 9$ lo cual implica que $D = 2$.

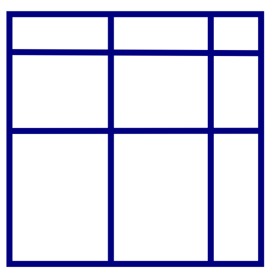
Observe que no importa el factor de escala que se use. Por ejemplo, si $F = 4$, obtenemos



$F = 4$ y $N = 16$

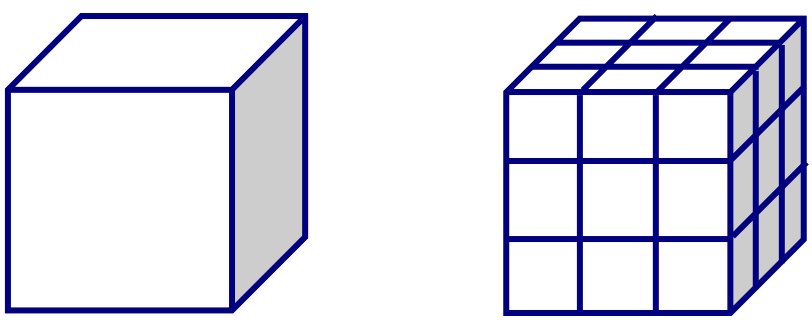
$4^D = 16$, por consiguiente $D = 2$

Si usamos un factor de escala de 2.5 , es decir, $F = 2.5$, observe que obtenemos $N = 6.25$



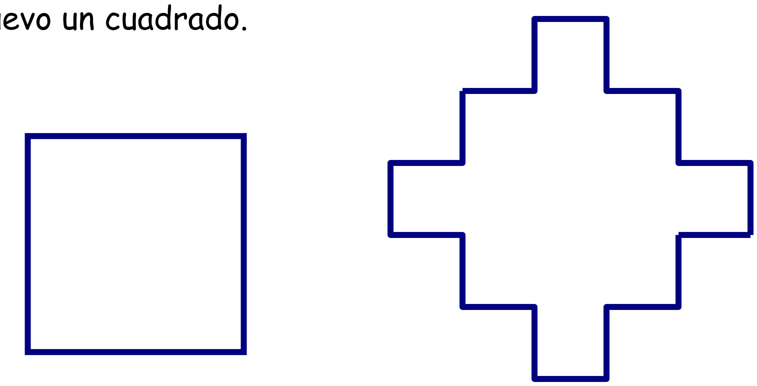
$2.5^D = 6.25$, por lo tanto $D = 2$

Si la figura es un cubo,



$F = 3$ $N = 27$ $3^D = 27$, por lo tanto $D = 3$

Considere de nuevo un cuadrado.



F = 3 N = 5

$$3^D = 5$$

$$\log 3^D = \log 5$$
$$D \log 3 = \log 5$$

$$D = \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1.46$$

Donde **D** es un número entre 1 y 2, esto es una extensión del concepto de dimensión Euclidea que siempre es un entero. **Nota:** Más adelante en el curso veremos que se resuelve para **D** usando logaritmos.

Un ejemplo sencillo para ilustrar este nuevo concepto de dimensión fractal Considere el triángulo de Sierpinsky discutido en la página 169 y 178 del manual Matemática Integrada del Nivel Superior. Tenemos dos etapas sucesivas en la construcción del fractal. Tomemos la Etapa 1 como la original.

Longitud original = 2 **Longitud nueva = 4**

Factor de escala (F) = $\frac{4}{2}$ = 2

Tamaño original = 3   Tamaño nuevo = 9

$$Razón = \frac{tamaño\ nuevo}{tamaño\ original} = \frac{9}{3} = 3$$

$\therefore$ F^D = R   con **D** dimensión fractal

2^D = 3 $\therefore$ 1 < D < 2

D = $\frac{\log 3}{\log 2}$

ACTIVIDAD D

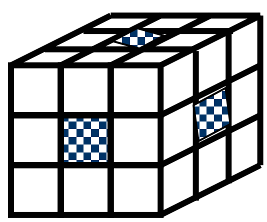
RESPUESTA

Se retiran 7 cubos, quedan 20. Factor de escala (F) = 3, Tamaño = 20. (Si aumentamos el tamaño proporcionalmente de la figura de forma que cada cubo sea una réplica del original, habrán 20)

F^D = R

3^D = 20

$$D = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2.73$$

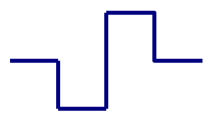


ACTIVIDAD A (Geometría fractal)

PROCEDIMIENTO

1. Toma una hoja cuadriculada 16x16. Considera que una unidad es igual a 4 espacios. Transformaremos un cuadrado unitario en otra figura a través de diferentes etapas, usando el proceso recursivo siguiente:

   En una etapa dada reemplazaremos cada segmento que aparezca en la parte correspondiente a un lado del cuadrado original con el generador siguiente,



   formado por segmentos de igual longitud que miden $\frac{1}{4}$ parte del segmento dado. Así pasamos a la próxima etapa.

   Construye un cuadrado unitario en la hoja cuadriculada para la etapa 1. Construye la figura que corresponde a la etapa 2. Contesta las preguntas siguientes y escribe tu contestación en la tabla.

   a. ¿Cuántos segmentos hay en cada parte que corresponde a un lado del cuadrado original?
   b. ¿Cuánto mide cada uno de estos segmentos?
   c. ¿Cuál es el perímetro de la figura resultante?

2. Usa la tabla siguiente para presentar los resultados de cada iteración desde la etapa 1 hasta la sexta.

ETAPAS	Segmentos en cada lado	Longitud del segmento (en un)	Perímetro de la curva (en un)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
⋮	⋮	⋮	⋮
n			

3. Halla una fórmula para hallar el perímetro de la figura en la iteración n.

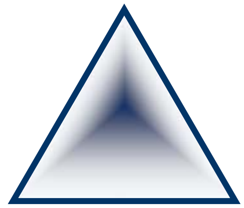
4. Halla el perímetro en la etapa 20.

5. Si el proceso continúa, ¿hacia dónde aparenta aproximarse el perímetro de la figura?

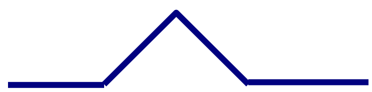
6. Busca el área de las primeras tres etapas. ¿Qué observas? Discute.

ACTIVIDAD B (Geometría fractal)

Considera un triángulo equilátero.



Vamos a transformar este triángulo mediante una regla iterativa. Es decir, la regla la repetimos. La regla es la siguiente: divide cada lado del triángulo en tres partes iguales. En el segmento del medio construye un triángulo equilátero y descarta la base de este triángulo. Reemplaza cada lado del triángulo original con esta figura de cuatro partes.



1. Lleva a cabo el mismo procedimiento para cada uno de los lados y llena la tabla siguiente.

ETAPAS	Segmentos en cada lado	Longitud del segmento (en un)	Perímetro de la curva (en un)
1	1	1	3
2			
3			
4			
5			
6			
⋮	⋮	⋮	⋮
n			

3. Observa detenidamente la tabla y halla una fórmula general para hallar el perímetro en cualquier etapa.

4. Discute qué le ocurre al perímetro a medida que **n** aumenta.

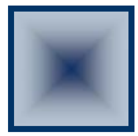
5. Completa la tabla siguiente.

ETAPAS	Número de nuevos triángulos	Longitud del lado del nuevo triángulo (en un)	Área de cada nuevo triángulo (en un)
1	1	1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$

6. Halla una fórmula para calcular el área en la etapa **n**.

ACTIVIDAD C (Geometría fractal)

1. Considera un cuadrado con un lado de longitud 1. ¿Cuál es el número menor de estos cuadrados que pueden ensamblarse lado con lado para formar un cuadrado más grande?



2. El tamaño de una figura se calcula contando el número de réplicas que la forman. Una réplica es el cuadrado original de lado con longitud 1. ¿Cuál es el tamaño del nuevo cuadrado? ¿Cuál es la longitud de cada lado del nuevo cuadrado?

3. El factor de escala (**F**) se define como:

$$F = \frac{longitud\ nueva}{longitud\ original}$$

   ¿Cuál es el factor de escala entre el cuadrado grande y el pequeño?

4. La razón (**R**) se define como:

$$R = \frac{tamaño\ nuevo}{tamaño\ original}$$

   Determina la razón entre los cuadrados.

5. Forma un cuadrado más grande que tenga tres unidades de longitud en cada lado. Compara este cuadrado con el cuadrado pequeño. ¿Cuál es el factor de escala entre los dos cuadrados? ¿Cuál es la razón entre el nuevo tamaño y el tamaño original?

6. Completa la tabla siguiente:

Factor de escala	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**. . .**	**10**
Razón del tamaño nuevo al original						. . .	

7. Discute lo que observas de la tabla.

Considera un triángulo equilátero donde cada lado tiene longitud 1. El tamaño de este triángulo es 1. Completa la tabla siguiente:

Factor de escala	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**. . .**	**10**
Razón del tamaño nuevo al original						. . .	

9. ¿Cómo se relacionan las filas de esta tabla si se comparan con la tabla anterior?

10. Definimos la dimensión fractal (**D**) de la manera siguiente:

$$\left(factor\ de\ escala\right)^{D} = \frac{tama\tilde{n}o\ \text{nuevo}}{\text{tamaño original}}$$

Halla la dimensión para el cuadrado y el triángulo.

ACTIVIDAD D (Geometría fractal)

Considera la esponja de Menger. Ésta se construye de la manera siguiente:

a. Divide un cubo en 27 cubos iguales.

b. Retira el cubo que queda en el centro de cada cara y también retira el cubo que queda en el mismo centro.

c. Repite la etapa a y b para cada uno de los cubos que quedaron. Construye hasta la etapa 3.

d. Halla la dimensión. Discute cómo lo obtuviste.

La Demostración Matemática
Notas sobre Geometría Deductiva

INTRODUCCIÓN

La demostración matemática y la solución de problemas son los dos temas de mayor dificultad en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas en cualquier nivel. Ambos son procesos que requieren mucho tiempo y esfuerzo del estudiante para dominarlos y un entendimiento de su naturaleza por el maestro para enseñarlos efectivamente. Repasaremos, en estas notas para el maestro, los conceptos básicos de una demostración matemática. No se presentan actividades específicas para el estudiante, pero se presentan sugerencias para que el maestro las desarrolle dependiendo del nivel de preparación de su clase.

La demostración matemática como la solución de problemas **no** pueden **ni** deben enseñarse como secciones específicas de un curso. Deben integrarse a todos los temas de los diferentes cursos del currículo. En particular, para que un estudiante aprenda cómo hacer demostraciones es necesario que desarrolle unas destrezas básicas de pensamiento. Destrezas como clasificar, categorizar, ordenar, estimar, computar mentalmente y razonar, entre otras, son fundamentales al proceso. Lo ideal sería que comenzase su desarrollo desde la escuela primaria a través de una enseñanza de tipo constructivista.

La realidad es que muchos estudiantes del nivel superior las poseen en forma limitada. Pretender enseñar la geometría deductiva en la forma tradicional a estos estudiantes se convierte en un mero ejercicio de memorización sin mayor trascendencia. Desarrollar y mejorar estas destrezas debe ser objetivo en la discusión de cualquier tema en un curso de matemáticas. Planificar bien las preguntas y guiar la discusión diaria en la clase para que el estudiante tenga la necesidad de usar estas destrezas, son maneras efectivas de irlas desarrollando. Cada vez que un estudiante usa inconscientemente estas destrezas al resolver problemas o justificar un resultado, el maestro debe identificárselas y explicarle su importancia en el razonamiento matemático. Todo ello debe ocurrir de forma casual y rutinaria y no como algo obligatorio que hay que aprender. Así se va estableciendo, en los cursos, el ambiente propicio para profundizar en el razonamiento matemático.

Consideremos algunos aspectos de una demostración matemática. Las demostraciones, problemas, preguntas y explicaciones que se presentan pueden ser usadas como aparecen en las clases o modificarlas, de acuerdo al nivel de preparación de los estudiantes.

¿Qué es una Demostración?

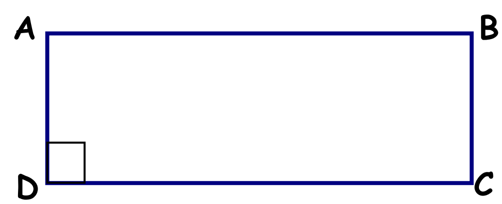
Considere el siguiente teorema:

Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces es un rectángulo.

Demostración:

(En la siguiente demostración numeraremos las aseveraciones que se hagan para facilitar su análisis)

1. Considere el paralelogramo con el ángulo **D** recto



2. $\therefore$ el ángulo **B** es recto ya que en un paralelogramo, los ángulos opuestos son congruentes.
3. $\therefore$ las medidas de ambos ángulos suman 180°, o sea, $m\angle D + m\angle B = 180^\circ$
4. Por un teorema anterior, la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°, o sea, $m\angle A + m\angle C + m\angle D + m\angle B = 360^\circ$
5. Sustituyendo obtenemos, $m\angle A + m\angle C = 180^\circ$
6. $\angle A \cong \angle C$, ya que son ángulos opuestos de un paralelogramo

7. $\therefore$ $m\angle A = m\angle C$, por definición de congruencia de ángulos

8. Sustituyendo en (5) obtenemos que $m\angle A = 90°$

9. $\therefore$ $\angle A$ y $\angle C$, son ángulos rectos por definición

10. $\therefore$ todos los ángulos del paralelogramo son rectos

11. $\therefore$ el paralelogramo **ABCD** es un rectángulo por definición

Hemos demostrado el teorema. Esta es una demostración de tipo informal. Es la que se recomienda presentar en clase a diferencia de las demostraciones a dos columnas de la geometría deductiva tradicional. Observe que las razones que justifican una conclusión se incluyen como parte de la aseveración hecha.

Analicemos la estructura de esta demostración:

- Observe que aparecen 11 aseveraciones. En lógica les llamamos ***proposiciones***. Una proposición es una oración declarativa que afirma algo que es cierto o falso, pero no ambos a la vez. Estas 11 proposiciones forman el ***argumento*** de la demostración. Un argumento es una sucesión de proposiciones que termina con una conclusión. Las proposiciones anteriores a la conclusión se les llama ***premisas***. El argumento se dice *válido* si la conclusión es una consecuencia inescapable de las premisas. Se acostumbra escribir "por tanto", o el símbolo $\therefore$ antes una proposición, cuando ésta es una inferencia o deducción lógica de las anteriores.

- En la demostración, la proposición 1 es un *dato*, en este caso corresponde a la hipótesis del teorema. Las proposiciones 2, 4, 6 corresponden a *teoremas anteriormente demostrados*.

  Los números 3, 7, 9, 11 son *definiciones*.

Aunque no aparece en forma explícita, la justificación para las proposiciones 5 y 8 es un *axioma*, (En este caso al axioma de sustitución: "cantidades iguales a cantidades iguales, son iguales entre sí").

Vemos entonces que, las proposiciones que aparecen en una demostración pueden ser datos, definiciones, teoremas anteriormente demostrados y axiomas o propiedades.

- Además, con cada proposición en la demostración, se acompaña una razón que justifica la misma. Cuando la razón es obvia o fácil de suponer, se acostumbra no escribirla, como en los números 9, 10. Si hay duda que la razón pueda ser obvia, se escribe. Una demostración no resulta incorrecta por exceso de razones. Antes en geometría, se separaban en columnas apartes las proposiciones (en la demostración) de las razones que las justificaban para mayor claridad.

- La última proposición que debe escribirse en una demostración, es el teorema a demostrarse. Se acostumbra escribir como última proposición el hecho o conclusión que establece el teorema, sin necesidad de escribirlo en su totalidad. En nuestra demostración es la proposición número 11.

Resumiendo: Una demostración consiste de una sucesión finita de proposiciones (llamado argumento), donde la última proposición, es el teorema a demostrarse (o la conclusión que establece al teorema) y de cada proposición se pasa a la siguiente mediante razones válidas o justificaciones.

¿Cómo podemos saber que una demostración está correcta?
Esto es, que el argumento utilizado es válido.
Para entenderlo necesitamos conocer
algunas nociones básicas de lógica elemental.

Nota: Esta demostración se puede presentar a la clase omitiendo las razones para que el estudiante las supla. Ejemplo: en el paso 4 se puede sustituir por 4) sabemos que la suma de todos los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°. Se pregunta entonces, por la razón que lo justifica.

Métodos de Demostración

A. Formas Proposicionales y Tablas de Verdad

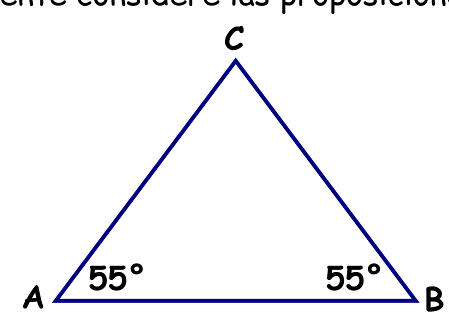
En el lenguaje ordinario, la oración es la unidad básica que nos permite expresar un pensamiento completo. En el lenguaje lógico, lo análogo es la proposición. La definimos como una oración declarativa que afirma algo que es cierto o falso. Los términos cierto y falso los consideramos términos no definidos, pero que todos conocemos a lo que se refieren.

Ejemplos:

1. "Un triángulo tiene 4 lados", es una proposición falsa
2. "El círculo es una figura interesante", no es una proposición aunque es una oración declarativa.
3. $\mathbf{x + 4 = 7}$**,** no es una proposición, porque no podemos decir que es cierta o falsa. Se convierte en proposición cuando se le asignan valores numéricos a $\mathbf{x}$. Cuando $\mathbf{x = 3}$, es cierta, para $\mathbf{x = 2}$ es falsa. También se les llama esquemas proposicionales u oraciones abiertas.

En el lenguaje ordinario combinamos oraciones mediante conjunciones y preposiciones para formar oraciones compuestas. Igualmente, en lógica combinamos proposiciones mediante *conectivos* para obtener proposiciones compuestas. Un análisis detallado de cómo se construyen proposiciones compuestas, muestra que esencialmente existen cinco conectivos. (En realidad se puede reducir a dos). Ilustrémoslo con un ejemplo.

En el triángulo siguiente considere las proposiciones.



Proposición 1: $\angle A \cong \angle B$
Proposición 2: **▲ABC** es equilátero

Si denotamos la proposición 1 con la letra **p** y la 2 con la letra **q** entonces, **p** es cierta y **q** es falsa.

Formemos las proposiciones compuestas que siguen donde se identifican los conectivos usados.

1. $\angle A \cong \angle B$ **y el ▲ABC** es equilátero, simbólicamente: **p y q**. El conectivo "**y**" se llama la *conjunción*. Se denota con el símbolo $\wedge$. Se escribe $p \wedge q$.

2. $\angle A \cong \angle B$ ó el **▲ABC** es equilátero, simbólicamente: **p ó q**. El conectivo "**ó**" se llama la *disyunción*. Se denota con el símbolo $\vee$. Se denota con el símbolo $\vee$. Se escribe $p \vee q$.

3. **▲ABC** no es equilátero. Simbólicamente: no **q**. El conectivo "**no**" se llama negación. Se denota con el símbolo **~**. Se escribe **~ q**.

4. **Si** $\angle A \cong \angle B$, entonces **▲ABC** es equilátero simbólicamente: si **p** entonces **q**. El conectivo "si ... entonces ..." se llama la *implicación* o *condicional*. Se denota con el símbolo $\rightarrow$. Se escribe $p \rightarrow q$.

5. $\angle A \cong \angle B$, si y solamente si **ABC** es equilátero, simbólicamente: **p** si y solamente si **q**. El conectivo "si y solamente si" se llama el *bicondicional*. Se denota con el símbolo $\leftrightarrow$. Se escribe $p \leftrightarrow q$.

Intuitivamente reconocemos que en las proposiciones compuestas anteriores.

$p \vee q$ es cierta
$p \wedge q$ es falsa
$\sim q$ es cierta
$p \rightarrow q$ es falsa
$p \leftrightarrow q$ es falsa

En lógica, la veracidad o falsedad de una proposición compuesta se determina exclusivamente a base de la veracidad o falsedad de las proposiciones combinadas y de un criterio preestablecido para cada conectivo. Los criterios de veracidad o falsedad para cada conectivo son: (**p**, **q** son proposiciones arbitrarias).

> $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ es cierto cuando por lo menos uno de los dos es cierto.
> $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ es cierto cuando los dos son ciertos.
> $\sim \mathbf{q}$ es cierto cuando **q** es falso, y falso cuando **q** es cierto.
> $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ es falso únicamente cuando **p** es cierto y **q** es falso.
> $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ es cierto únicamente cuando las dos son ciertas o las dos son falsas.

Notas:

1. En álgebra hablamos del número **x**, cuando lo correcto debiera ser la variable **x**, pero es una forma de hablar aceptada. De igual manera, en lógica hablamos de la proposición **p**, en vez de la variable proposicional **p**. En álgebra, cuando combinamos variables y constantes mediante las operaciones, al resultado le llamamos una expresión algebraica. En lógica, al resultado de combinar variables proposicionales mediante conectivos, como $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{T}$, se les llama *formas proposicionales*. Si se sustituyen las variables por proposiciones específicas, la forma proposicional se convierte en una proposición compuesta. Sin embargo, se acostumbra a veces hablar de la proposición compuesta $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{T}$.

2. En el lenguaje ordinario, las oraciones compuestas se admiten cuando existe alguna concordancia entre las ideas expresadas en cada oración. En lógica se admite cualquiera proposición compuesta sin que importe que haya relación o no entre las ideas que expresan las proposiciones. De esta manera se puede expresar en una tabla la veracidad o falsedad de una forma proposicional, considerando todas las posibles alternativas (ser cierto o falsa) de las variables proposicionales que la componen. Se conocen como tablas de verdad.

Ejemplos:

Sea **p**: Un triángulo con dos ángulos de **60**° es equilátero.
q: La ecuación cuadrática $\mathbf{x^2 + 1 = 0}$ tienen solución real.

$\mathbf{p \rightarrow q}$: Si un triángulo que tiene dos ángulos de **60**° es equilátero entonces la ecuación cuadrática $\mathbf{x^2 + 1 = 0}$ tienen solución real.

La proposición $\mathbf{p \rightarrow q}$ es falsa, porque **p** es cierto y **q** es falsa y el criterio para la implicación indica que cuando ésto ocurre, la proposición completa es falsa.

Nota: Es importante que el estudiante reconozca lo que es una proposición matemática. Se les solicita que den ejemplos de los distintos tipos de proposiciones en matemática y den oraciones declarativas que no sean proposiciones. También, que den ejemplos de proposiciones matemáticas simples y compuestas que sean ciertas ó falsas.

Tablas de Verdad

En la tabla de verdad para una forma proposicional, se desea exhibir todas las posibles alternativas que pueden ocurrir de acuerdo a la veracidad o falsedad de cada proposición individual. Veamos la tabla para $\mathbf{(p \vee q) \rightarrow T}$. (Designaremos con ***C* – cierto**, **F- falso**).

Una forma de construir una tabla de verdad es la siguiente:

1. Una columna para cada proposición individual y una para cada conectivo. En este caso se necesitan 5 columnas.
   $\mathbf{p \mid q \mid T \mid p \vee q \mid (p \vee q) \rightarrow T \mid}$.

2. Para el número de filas, habrán tantas como combinaciones diferentes de cierto o falso hayan para las proposiciones individuales.

Cada una de **p, q, T** pueden ser ciertas (**C**) o falsas (**F**), luego hay 8 maneras diferentes de combinarlas. Una forma práctica de indicarlas todas es la siguiente: En la primera columna de **p**, escriba alternadamente cierto, falso; luego para la siguiente **q**, de dos en dos y para la tercera **T** de cuatro en cuatro. Las columnas se llenan de acuerdo al criterio del conectivo usado.

p	**q**	**T**	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow T$
C	C	C	C	C
F	C	C	C	C
C	F	C	C	C
F	F	C	F	C
C	C	F	C	F
F	C	F	C	F
C	F	F	C	F
F	F	F	F	C

Ahora veremos cómo se aplican estos conceptos en las demostraciones.

B. Demostración Directa

1. Los teoremas en geometría (y en matemática) presentan unas condiciones hipotéticas, y luego establecen una conclusión. Son de la forma (o pueden escribirse como):

   Si ________**p**________ entonces ________**q**_______ donde **p** es la hipótesis, **q** es la conclusión. Esto es, son implicaciones o condicionales. Recuerde que implicación $p \rightarrow q$ es falsa solamente cuando **p** es cierto y **q** falso.

   Su tabla de verdad es:

p	**q**	$p \rightarrow q$
C	C	C
F	C	C
C	F	F
F	F	C

Los casos en que sabemos que la hipótesis **p** es falsa no interesan en matemáticas ni en ciencias. En los casos en que asumimos (o sabemos) que **p** es cierta y si trabajamos correctamente, partiendo desde **p** hasta llegar a **q**, esto es **p** → **q**, podemos concluir que **q** es cierto. Este método de demostración se llama **directo**. Es el que se utilizó en el ejemplo al comienzo de estas notas. Veamos:

El teorema

"Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces es un rectángulo" es de la forma "Si **p** entonces **q**" o **p** → **q**.

Aquí, **p** es "Un paralelogramo, tiene un ángulo recto"
q es "El paralelogramo es un rectángulo"

En el argumento de la demostración presentada al principio.

- Se asume que **p** es cierto – proposición 1.
- Se establece que **p** → **q** es cierto – las proposiciones desde 1 al 11.
- Se concluye que **q** es cierto y por tanto el teorema ha sido demostrado.

Esta manera de argumentar se representa simbólicamente en lógica de las tres formas siguientes:

i) $\begin{array}{l} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \\ \underline{\mathbf{p} \qquad} \\ \therefore \mathbf{q} \end{array}$

ii) Premisas: $\mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{q}$

Conclusión: $\mathbf{q}$

iii) Si ($\mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$), entonces $\mathbf{q}$

Representa una de las leyes básicas del razonamiento lógico conocida como Modus Ponens o Ley de Separación (en inglés "Detachment Law").

C. Demostración por Contraejemplo

La proposición "Todos los rectángulos son cuadrados" es obviamente falsa. Para demostrarlo no es necesario escribir un ensayo. Basta con presentar un rectángulo que no sea un cuadrado, digamos un rectángulo con medidas 3 x 5 unidades. Se conoce como un contraejemplo. ¿Porqué esa forma de demostración es válida?

"Todos los rectángulos son cuadrados" es el tipo de proposición **p** que afirma o niega, que ningún, por lo menos uno o todos los objetos de una clase, tienen o no tienen un atributo. En lógica se llama a esas frases o palabras *cuantificadores*". Las proposiciones en que aparecen se niegan de una manera especial. Así:

1. **p**: Todos... son ... **~p**: Algún ... no es ...	2. **p**: Ningún ... es ... **~p**: Algún ... es ...	3. **p**: Por lo menos ... es ... **~p**: Ningún ... es ...

Así la negación de **p**: Todos los rectángulos son cuadrados es: **~p**: algún rectángulo no es cuadrado. Luego, un ejemplo de rectángulo que no sea un cuadrado basta para demostrar que **p** es falso.

D. Demostración por Contradicción

Considere la siguiente demostración.

Teorema:

Sea **n** entero. Si $\mathbf{n^2}$ es par entonces **n** es par.

Demostración:

Sea **n** entero y $\mathbf{n^2}$ par. Asuma que **n** es impar.

$\therefore \mathbf{n = 2t + 1}$ para algún entero **t** por definición de entero impar.

Entonces $\mathbf{n^2 = (2t + 1)^2}$

$\mathbf{n^2 = 4t^2 + 4t + 1}$

$\therefore$ **n^2=2(2t^2 + 2t) + 1 con 2**

$\therefore$ **n^2** es impar por definición, esto contradice la hipótesis de que **n^2** es par

$\therefore$ **n** no es par

$\therefore$ **n es par**

Este método de demostración se llama "por contradicción". También se le conoce como "por reducción al absurdo". Se quiere demostrar que una proposición **p** es cierta. Se asume que su negación **~p** es cierta. Se argumenta correctamente hasta llegar a una conclusión que resulte contradictoria a lago que se sabe cierto o se ha asumido cierto al comienzo de la demostración. Por tanto lo que se asumió, que **p** es cierto, no lo es. Se concluye que como **~p** es falso, **p** es cierto y termina la demostración. Para dominar este método se requiere saber negar cualquier proposición o forma proposicional.

En el ejemplo, el teorema demostrado "Si **n^2** es par, entonces **n** es par" es de forma **p → q**. Su negación **~(p → q)** es **p** y **~q**. Esto corresponde a "**n^2** es par y **n** es impar", que fue lo asumido en la demostración. Recuerde que para negar una proposición compuesta se niega la forma proposicional que le corresponde.

(Nota: Para verificar que **~(p → q)** es **p** $\wedge$ **(~q)** se construye la tabla de verdad de ambos).

p	**q**	**~p**	**~q**	**p → q**	**~(p → q)**	**p $\wedge$ (~q)**
C	C	F	F	C	F	F
F	C	F	F	C	F	F
C	F	C	C	F	C	C
F	F	C	C	C	F	F

Observe que las columnas de **~(p → q)** y **p** $\wedge$ **(~q)** coinciden. Esto nos indica que son equivalentes. Otras negociaciones de formas preposicionales que asumen muchos teoremas son:

$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$	**Conocidas en lógica como Leyes de Morgan**
$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$	

Puede verificarlas construyendo las tablas de verdad.

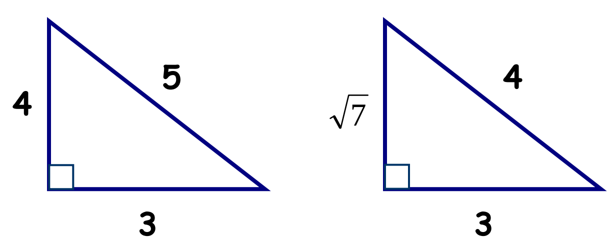
Demostración por Contraposición

Aquí se usa la implicación o el condicional **p → q**. Asociado con cada implicación **p → q** hay 3 implicaciones adicionales. Veamos:

p → q: Si dos triángulos son congruentes, entonces tienen dos lados y un ángulo congruentes.

1. el converso **q → p**	Si dos triángulos tienen dos lados y un ángulo congruentes, entonces son congruentes.
2. el inverso **~ p → ~ q**	Si dos triángulos no son congruentes, entonces no tienen dos lados y un ángulo congruentes.
3. el contrapositivo **~ q → ~ p**	Si dos triángulos no tienen dos lados y un ángulo congruentes, entonces no son congruentes.

Observe los dos triángulos rectángulos siguientes:



Esto es un ejemplo que demuestra que mientras sabemos que **p → q** es cierta, el converso **q → p** es falso. Igualmente el inverso **~ p → ~ q** es cierto.

No es casualidad que en este ejemplo una implicación y su contrapositivo coincidan en ser ciertos. Es la regla general que una implicación y su contrapositivo son equivalentes. Para verlo, construyamos la tabla de verdad para todas las 4 implicaciones.

p	q	~p	~q	$p \to q$	$q \to p$	$\sim p \to \sim q$	$\sim q \to \sim p$
C	C	F	F	C	C	C	C
F	C	C	F	C	F	F	C
C	F	F	C	F	C	C	F
F	F	C	C	C	C	C	C

Vea que las columnas $p \to q$ y $\sim q \to \sim p$ coinciden. En lógica se dice que son equivalentes, significa que da lo mismo demostrar que si **p** entonces **q**, que, si **~ q** entonces **~ p**. Es uno de los métodos más importante de demostración en matemáticas. Se conoce como demostración por contraposición.

A veces tiene que demostrar un teorema que tiene forma de implicación, pero se hace muy difícil la demostración. Puede entonces considerar el contrapositivo y puede ser que resulte más fácil.

Ejemplo: Teorema

Sean **x**, **y** números reales. Si $x \neq y$ entonces $x^3 \neq y^3$
(Esto no es obvio que sea cierto ya que si $x \neq y$ puede ocurrir que $x^2 = y^2$ como para $x=2,\ y=-2$)

Si consideramos el contrapositivo:
Si $x^3 \neq y^3$ entonces $x = y$ resulta más fácil demostrarlo.

Demostración:

Sea $x^3 = y^3$, entonces $x^3 - y^3 = 0$
$\therefore$ $(x- y)(x^2 + xy + y^2) = 0$ Factorizando
$\therefore$ $x - y = 0$ ó $x^2 + xy + y^2 = 0$

Ahora si $x - y = 0$ entonces $x=y$ se demuestra el teorema.
Si $x^2 + xy + y^2 = 0$, resolvemos para x en término de y usando la fórmula cuadrática obtenemos $x = \frac{-y \pm \sqrt{-3y2}}{2}$

Los únicos valores reales x, y que la satisfacen son $y=0$, $x=0$ lo que verifica que $x = y$.
$\therefore$ se demuestra que si $x^3 = y^3$ entonces $x = y$.

¿Qué método de demostración se usó para demostrar que si $x^3 = y^3$, entonces $x = y$?

El método de demostrar un teorema de la forma si **p** entonces **q** a través de su contrapositivo **~ q** entonces **~ p** se conoce como el ***método de contraposición***. En lógica se representa simbólicamente mediante:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\sim q} \\ \therefore \sim p \end{array}$$

ó

Premisa: $p \rightarrow q$

$\sim q$

Conclusión: $\sim p$

También:

Si **p → q** y **~ q**, entonces **~ p** en su forma es una ley de lógica conocida como Modus Pollens o Ley de Contraposición.

Existen otros métodos de demostración que no consideramos en estas notas como demostración y por inducción matemática que se usa mucho en otras áreas de matemática. Las siguientes leyes de lógica representan métodos de demostración que seguramente ha utilizado sin saberlo. ¿Puede explicar porqué son argumentos válidos?

1. Silogismo Disyuntivo		2. Silogismo Hipotético	3. Dilema o Demostración por División en Casos
a) $\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim q \\ \hline \therefore p \end{array}$	b) $\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$	$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow T \\ \hline \therefore T \end{array}$	$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \rightarrow T \\ q \rightarrow T \\ \hline \therefore T \end{array}$

Nota:

Es importante comprender que en una demostración, lo que se establece mediante los argumentos válidos, es que la conclusión es válida, porque surge inescapablemente de las premisas. No se establece que su contenido sea cierto. Recuerde que usted asume como cierta las hipótesis. ¿Qué ocurre si en realidad son falsas? La validez de una conclusión tiene que ver con **la forma** del argumento usado en la demostración mientras que su veracidad depende de las hipótesis y el contenido de las premisas dentro de la disciplina en que se producen.

Veamos algunos ejemplos de Argumentos válidos y no válidos. Explique:

Argumento 1:

Premisa:	Si no llueve la casa se quema.
	La casa se quemó
Conclusión:	No llovió

El argumento no es válido. La conclusión no sigue inescapablemente a las premisas y no es válida.

Razón:	Sea **p**: Llueve
	q: La casa se quema

Simbólicamente tenemos el argumento:

Premisa:	$\sim p \rightarrow q$
	q
Conclusión:	$\sim p$

Si construimos la tabla de verdad tenemos:

p	**q**	**~ p**	**~ p → q**
C	C ✓	F	C ✓
F	C ✓	C	C ✓
C	F	F	C ✓
F	F	C	F

Localice las premisas que son (o las asumimos) ciertas **(✓)**, y observe la conclusión **~ p** que corresponde, en un caso es F (falsa) ∴ no llovió. Por tanto la conclusión no es inescapable, luego no es válido el argumento.

Un argumento no válido que lleva a una conclusión aparentemente válida se conoce en lógica como una **falacia**. En este caso se llama la falacia del converso. Vea que en realidad, el argumento lo que hace es afirmar que si una implicación es cierta su converso también lo es.

Argumento 2:

Premisa:	Si no llueve la casa se quema.
	La casa se quemó
Conclusión:	No Llovió

El argumento no es válido. Por tanto la conclusión tampoco. Analícelo.

Argumento 3:

Premisa:	Si no llueve la casa se quema.
	La casa no se quemó
Conclusión:	Llovió

El argumento es válido. Por tanto la conclusión es válida por la ley de contraposición. Analícelo.

Argumento 4:

Premisa: Si no llueve la casa se quema.
Llovió
Conclusión: La casa no se quemó

El argumento no es válido. Por tanto la conclusión tampoco. Analícelo.

Es una falacia conocida como la falacia del inverso.

Estas dos falacias, la del converso y la del inverso (Argumentos 1 y 4) son bien comunes en la vida diaria. Son formas incorrectas de argumentar y fuentes de discordia y discusión entre las personas por desconocimiento de lógica.