Solución de Problemas

INTRODUCCIÓN[i]**:**

Una dificultad que se encuentra cuando se discute el concepto de solución de problemas, es precisamente el definir qué es un "**problema**". Un problema es una situación, cuantitativa o de otro tipo que confronta un individuo, la cual requiere solución y no hay un método obvio o aparente para obtenerla.

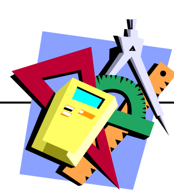
NOTA: A medida que una persona adquiere mayor experiencia matemática, lo que originalmente era un problema, se convierte sólo en un ejercicio rutinario, mientras que para algunas personas lo que es un problema resulta ser sólo un ejercicio para otras.

La existencia de un problema implica que el individuo se encuentra con una situación que no reconoce y en la cual no puede aplicar meramente un modelo. Es importante resaltar que no se debe considerar un problema aquella situación que se puede resolver con algoritmos previamente aprendidos.

NOTA IMPORTANTE SOBRE LOS PROBLEMAS VERBALES QUE APARECEN EN LOS TEXTOS

Estas secciones que se titulan "problemas verbales" y que encontramos frecuentemente en los libros, no constituyen verdaderos problemas. En la mayoría de los casos, el maestro ha presentado un modelo de solución previamente en la clase. Los estudiantes entonces, aplican este modelo a "problemas" similares. Esencialmente lo que el estudiante está aprendiendo es un algoritmo, es decir, aplica una técnica a un solo tipo de "problema", la cual garantiza que obtendrá la solución deseada, si no se comete ningún error en la mecánica. Muy pocos de estos problemas requieren un pensamiento profundo de parte de los estudiantes.

Se consideran estos "problemas verbales" sólo como ejercicios o problemas de rutina. Esto no quiere decir que se tengan que eliminar del currículo; estos sirven para un propósito y como tal deben permanecer. Por ejemplo, exponen a los estudiantes situaciones en particular y proveen práctica en el uso de algoritmos.



Pero es sumamente importante que el maestro tenga claro que aquellos estudiantes que resuelven estos ejercicios rutinarios, siguiendo un modelo o algoritmo, no están siendo expuestos a la solución de problemas.

Es importante recordar que en todo problema hay dos tipos de información: aquella que aparece explícitamente formulada y aquella que aunque no aparece, se puede extraer indirectamente de la situación dada. Ejemplo, si un problema habla de un triángulo rectángulo aunque no aparezca, sabemos que en ese triángulo se cumple el teorema de Pitágoras.

¿QUÉ ES LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

La solución de problemas es un ***proceso***. Es la forma en que un individuo usa el conocimiento, las destrezas y el entendimiento previamente adquirido para satisfacer las demandas de una situación familiar.

El estudiante debe sintetizar lo que ha aprendido y aplicarlo a una situación nueva y diferente.

Algunos educadores asumen que el ser buen solucionador de problemas se desarrolla incidentalmente, según se resuelvan muchos problemas. Aunque ésto es cierto en parte, muchas personas están de acuerdo que las destrezas en la solución de problemas se deben considerar una parte distinta del conocimiento y se debe enseñar como tal.

De hecho, el conocimiento de las matemáticas se puede dividir en varias partes, dos de las cuales son:

1. información y datos
2. la habilidad para utilizar esta información y datos

Esta última es una parte esencial del proceso de solución de problemas.

¿POR QUÉ ENSEÑAR SOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

La mayoría de los estudiantes raras veces utilizan la matemática pura en su vida diaria, mientras que sí se requiere que resuelvan situaciones cuantitativas, tanto en su trabajo, como en su vida social. Muchas veces, estas situaciones cuantitativas, se presentan como problemas. En raras ocasiones, las personas se encuentran con situaciones que se pueden resolver siguiendo un algoritmo. De hecho, para muchas personas, la matemática es precisamente, ***¡la solución de problemas!***

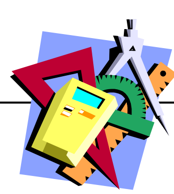
A veces nos hemos encontrado con la situación de que los estudiantes no ven la relación entre la matemática que aprenden en el salón de clases y las situaciones cuantitativas de la vida. Si hacemos énfasis en la solución de problemas, posiblemente podemos lograr una mejor actitud en nuestros alumnos.

De hecho, lamentablemente, algunos estudiantes ni siquiera ven la relación entre una unidad y otra de estudio (es decir, perciben la matemática como "algo segmentado"), sin embargo, la solución de problemas les provee un mecanismo para entender la conexión entre ideas matemáticas. Un buen problema debe servir tanto para repasar ideas pasadas como para "preparar el terreno" para ideas futuras.

La solución de problemas es más excitante, ofrece más retos y resulta más interesante a los estudiantes que la repetición monótona de un mismo tipo de ejercicio.

Si examinamos la ejecutoria de los estudiantes en clase, observamos que el éxito los motiva y hace que se entusiasmen, mientras el fracaso causa que no quieran "saber más del asunto".

Esto es razón suficiente para que la selección de problemas sea una adecuada.



¿CUÁNDO ENSEÑAR SOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

En este aspecto, cada persona tiene su opinión propia. Se recomienda que la enseñanza de solución de problemas ocurra en cada periodo de clases.

Se debe incluir:

- La solución de problemas
- Proponer soluciones
- Métodos para atacar el problema

Pensemos qué inútil resulta para un estudiante el estar, digamos dos semanas, en un estudio profundo y concentrado en el tema de fracciones pero luego no lo vuelve a utilizar (es decir, no le ve la aplicación).

¡Claro!, hay que dedicar tiempo también al estudio de algoritmos y de práctica, ya que es necesario que los alumnos refuercen ciertas destrezas, pero no podemos quedarnos en esa etapa.

La cantidad de problemas que se discuta en cada sesión, debe ser pequeña. Debemos dar tiempo para que los estudiantes internalicen los procesos y los desarrollen. Esto es mucho más importante que el simplemente cubrir material. Recordemos que más que la cantidad, es necesario asegurar la calidad.

¿QUÉ HACE QUE UNA PERSONA SEA UN BUEN SOLUCIONADOR DE PROBLEMAS?

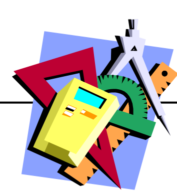
A pesar que no es fácil determinar qué hace que un estudiante sea buen solucionador de problemas, hay algunas características que podemos identificar:

Afectivas

- ✓ Tiene deseos de resolver problemas
- ✓ Es extremadamente perseverante: no se desanima si no obtiene el resultado correcto; sigue tratando y tratando. Si un método no funciona, trata otro. Se cuestiona: "¿Qué sucedería si...?", cambiando la información ofrecida en el problema
- ✓ Demuestra habilidad para omitir algunos pasos en la solución de problemas. Hace conexiones
- ✓ No tiene miedo de adivinar: toma decisiones informadas a la luz de la información que les provee el problema

Analíticas

- ✓ Lee <u>cuidadosamente</u> el problema
- ✓ Determina cuál es el objetivo del problema
- ✓ Identifica la información relevante suministrada por el problema
- ✓ Determina la estrategia o estrategias para la solución del problema
- ✓ Una vez obtiene la solución verifica si la solución es razonable



¿QUÉ CARACTERÍSTICAS TIENE UN BUEN PROBLEMA?

Es necesario destacar que un problema no necesita ser un "problema verbal" para ser bueno. Cualquier situación, por más simple que parezca, pero que requiera del estudiante hacer uso de varias destrezas básicas del pensamiento es un buen problema. Destrezas como ordenar, clasificar, estimar, razonar, observar patrones y otras son fundamentales para el desarrollo matemático del estudiante. Mientras más simple sea la formulación del problema y más de estas destrezas requiera para su solución, mejor resulta para que el estudiante vaya ganando confianza en su habilidad para resolver problemas.

1. **La solución del problema debe involucrar distintos conceptos o destrezas matemáticas.**

   Muchos problemas no parecen ser matemáticos en contexto, pero la solución involucra principios matemáticos básicos. Es posible que se encuentre algún patrón que el estudiante reconozca. En algunos casos, el problema se resuelve posiblemente con la aplicación de alguna destreza básica.

2. **El problema se debe generalizar o extender a una variedad de situaciones.**

   Un problema no se ha terminado necesariamente cuando se encuentra una solución satisfactoria.

   La solución debe sugerir variaciones de algunas partes del problema original.

   Como ejemplo, un problema de geometría plana en dos dimensiones puede cambiar a uno de tres dimensiones (geometría del espacio). Es decir, los círculos pueden tornarse en esferas, los rectángulos en cajas, etc.

   Debemos tratar de generalizar el problema del caso específico en que se esté trabajando a casos más generales.

3. **El problema se puede resolver de varias formas.**

El proceso de solución de problemas debe culminar en:

a) una solución algebraica
b) una solución geométrica
c) una solución encontrada a través de razonamiento lógico

Tiene más valor en el proceso de solución de problemas el resolver un mismo problema de cuatro formas diferentes, que resolver cuatro problemas cada uno con su método particular.

¿QUÉ HACE QUE UN MAESTRO SEA UN BUEN SOLUCIONADOR DE PROBLEMAS?

Todo lo que se ha expuesto anteriormente sobre solución de problemas depende mucho de la forma en que el maestro lo ponga en práctica.

Si el estudiante no tiene un modelo que lo motive y le brinde entusiasmo, no se podrá cosechar nada positivo.

El éxito en la solución de problemas requiere una actitud positiva de parte del maestro. Esto significa que éste se debe preparar cuidadosamente y debe aprovechar las situaciones que se le presenten diariamente en su salón de clases para poner en práctica este proceso.

El conocer a los estudiantes ayuda a la selección que se harán de los problemas. Los problemas que se resuelven en clase deben estudiarse desde diferentes puntos de vista, analizar ideas, posibles soluciones y en general, que motiven a la discusión.

El maestro debe mostrar el mismo entusiasmo que desea inculcar en sus alumnos. Finalmente, aquellos maestros que involucran a sus estudiantes a solucionar problemas, a pensar, que le hacen preguntas de análisis; son aquellos que le proveerán a sus estudiantes con una rica y vasta experiencia en este maravilloso proceso.

Estrategias para resolver problemas

La enseñanza de solución de problemas nunca debe consistir de resolver problemas aisladamente. Cada problema que se resuelva debe ir acompañado de una explicación por parte del maestro de la estrategia usada en su solución. Una estrategia es un plan organizado para lograr un objetivo. Al discutir una estrategia es importante hacer énfasis en las destrezas de pensamiento necesarias para implementarla. Ninguna estrategia funcionará si el estudiante no domina las destrezas. Por ello, el maestro tiene que organizar su clase diaria de forma constructivista, de manera que la práctica de esas destrezas se convierta en rutina. Veamos algunas de las estrategias.

A. Tanteo y error ("Guess and Check")

Esta estrategia posiblemente constituye la forma más natural que poseen los estudiantes para resolver problemas. Desafortunadamente, cuando los introducimos a resolver problemas, enfatizamos algoritmos rigurosos. Por consiguiente, muchos descartan esta estrategia como una herramienta para solucionar problemas.

Por lo tanto, al enseñar la misma, debemos motivar a los estudiantes a que adivinen con sentido. Solo cuando ellos se sientan cómodos al hacerlo, se les puede enseñar los aspectos principales de esta estrategia:

1. Lleve a cabo una adivinanza informada ("educated guess") como medio de solución.
2. Coteje lo que adivino (tanteo) utilizando las condiciones del problema.
3. Use la información obtenida al cotejar la adivinanza anterior para hacer una mejor.
4. Continúe este procedimiento hasta que obtenga la contestación correcta.

Dijo George Polya: "Ciertamente, vamos a aprender demostrando pero también aprendamos adivinando".

Recuerde que la estrategia de tanteo y error no consiste en adivinar "a lo loco".

B. Tablas

Muchos de los estudiantes tienen dificultad cuando resuelven problemas verbales. La mayoría de las veces se debe a la incapacidad para trasladar frases lingüísticas a frases algebraicas, que es la forma tradicional en que se enseña.

Si no conocen este proceso, se pierden en el problema, a pesar de entender el mismo. Es por ésto que se les debe enseñar una estrategia alterna, menos sofisticada para llegar a la solución. La estrategia del uso de la tabla, por lo general, consigue este propósito.

Aquí incluimos el preparar listas ordenadas y tablas corrientes.

Este proceso de hacer lista, es sumamente importante cuando se usa el proceso de eliminación, para el cual hay que determinar todas las posibilidades antes de excluir algún caso; las tablas se pueden usar como un organizador cuando se usa la estrategia de "tanteo y error".

C. Patrones

Los estudiantes han estado trabajando con éstos desde grados primarios, ya sea:

- En el proceso de conteo
- En tablas de suma
- En tablas de multiplicar
- Etc.

Pero a pesar de lo anterior, por lo general, no se presentan los patrones como una estrategia para resolver problemas.

Es importante resaltar el hecho de que los patrones constituyen un primer paso en la formulación de generalizaciones para luego probar formalmente la veracidad de un argumento dado. Es por ésto que los mismos constituyen una herramienta sumamente importante en el desarrollo de la madurez matemática de los estudiantes. Dijo en una ocasión G. H. Hardy:

> "The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be beautiful; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics."

D. Hacer un modelo

Existe un refrán que dice: "Un dibujo dice más que 1,000 palabras". El mismo expresa una gran verdad, aún en el campo de las matemáticas.

El hecho de percibir un modelo, es frecuentemente una herramienta muy efectiva para descubrir y explicar tanto conceptos matemáticos como útil en la solución de problemas.

NOTA: Nos estamos refiriendo a modelos simples ya sean dibujos u objetos que ayuden a visualizar; no modelos abstractos de sistemas muy elaborados.

En ocasiones se ha dicho que los estudiantes son incapaces de usar esta estrategia, pero la experiencia en el salón de clases demuestra que dicha aseveración es una falacia. Se debe motivar a los estudiantes a desarrollar la misma.

Hay dos pasos básicos al utilizar esta estrategia:

1. **Decidir el modelo mas apropiado al problema** – en muchas ocasiones, para resolver un problema dado, se pueden utilizar más de un modelo. Todo depende de los materiales disponibles, del conocimiento previamente adquirido y de la percepción de lo que es importante en el problema.

2. **Usar el modelo seleccionado como ayuda en la solución del problema** – en muchos casos, el modelo constituye la solución al problema. En otros, solo representa posibles soluciones, las cuales se pueden modificar para llegar a la solución adecuada.

Finalmente, muchos modelos sirven para:

- Organizar la información del problema
- Como una ayuda para entender el problema

En cualquiera de los dos casos, tanto la información como el entendimiento obtenido del modelo, deben sugerir otro procedimiento que se pueda aplicar para resolver el problema.

E. Razonamiento lógico deductivo

Igual que la estrategia de tanteo y error, es una de las más usadas en la vida diaria, aunque a veces erróneamente por desconocimiento de algunos de sus principios. Por lo general, todas las otras estrategias se usan acompañados por ésta.

F. Por analogía

Muchos problemas pueden resolverse, creando un problema parecido, pero más fácil de interpretar y analizar. La solución de éste puede sugerirnos maneras de resolver el más complicado.

Existen muchas otras estrategias de solución de problemas. Lo importante es que cada vez que resuelva uno, identifique el proceso que llevó a cabo y si puede aplicarlo a otras situaciones. De poderlo hacer, tiene otra estrategia para resolver problemas.

G. Trabajar hacia atrás. (Back tracking)

PROCEDIMIENTO

1. Haga una introducción sobre lo que es un problema y las estrategias para resolverlo.
2. Organice en grupos la clase.
3. Pida que resuelvan los problemas y que identifiquen las estrategias de solución que usaron, además de las destrezas básicas de pensamiento para llegar a esa solución.

H. Descomponer en una situación más sencilla

RESPUESTAS (a algunos problemas de la Guía del Estudiante)

1. 2178
   X 4
   8712

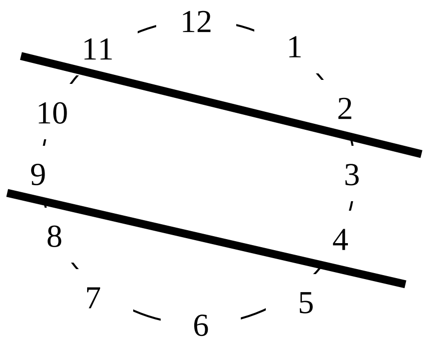
2. Lo hizo el conejito
   La ardilla dice la verdad

3. Pedro, José, Norma, Juan, Luis, María

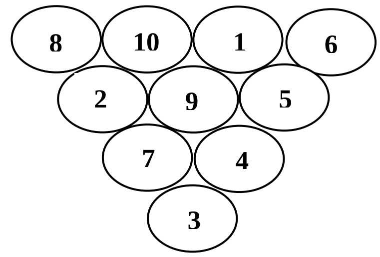
4. Fig 1- 7 triángulos
   9 cuadrilátero
   Fig 2- 18 triángulos
   14 cuadriláteros

5. $1.19

6.



7.



8. El número total de Ancestros es 231

9. El número menor de viajes es 11

Actividad 1

En el problema siguiente cada letra representa un número entre 0 y 9, inclusive. Diferentes letras representan números diferentes. Halla el número que representa cada letra para que la operación aritmética indicada esté correcta.

1.

$$\begin{array}{r} \mathbf{A\ B\ C\ D} \\ \times \qquad \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{D\ C\ B\ A} \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r} S\ U\ N \\ +\ F\ U\ N \\ \hline S\ W\ I\ M \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{r} S\ E\ N\ D \\ +\ M\ O\ R\ E \\ \hline M\ O\ N\ E\ Y \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{r} M\ E\ R\ R\ Y \\ +\ X\ M\ A\ S \\ \hline F\ O\ R\ A\ L\ L \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{r} U\ S\ S\ R \\ +\ U\ S\ A \\ \hline P\ E\ A\ C\ E \end{array}$$

Actividad 2

La abuelita osa llama al detective zorro para que investigue quién le destrozó el jardín. Los sospechosos son el conejito, el cabrito, la ardilla y el perrito. El zorro sabe que solamente uno de ellos dice la verdad y que los otros mienten. He aquí lo que dijeron.

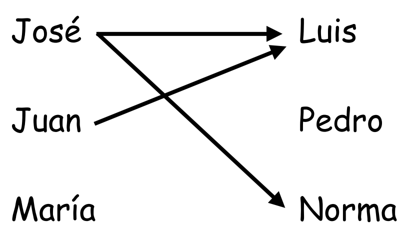
conejito: *Yo no lo hice*
cabrito: *Lo hizo el perrito*
perrito: *Lo hizo la ardilla*
ardilla: *El perrito miente*

Luego de pensar un rato, el zorro dice:

Ya se quién lo hizo.
¿Quién lo hizo?
¿Quién dice la verdad?

Actividad 3

A continuación, aparecen dos columnas de estudiantes de estaturas diferentes. Cuando un estudiante de la primera columna es más alto que uno de la segunda se ilustra con una flecha.



Escribe los nombres de los estudiantes en orden de mayor a menor estatura.

Actividad 4

Cuenta el número de triángulos y de cuadriláteros que aparecen en cada figura.

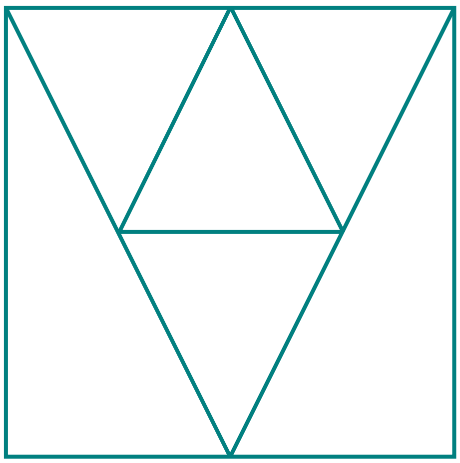


Figura 1

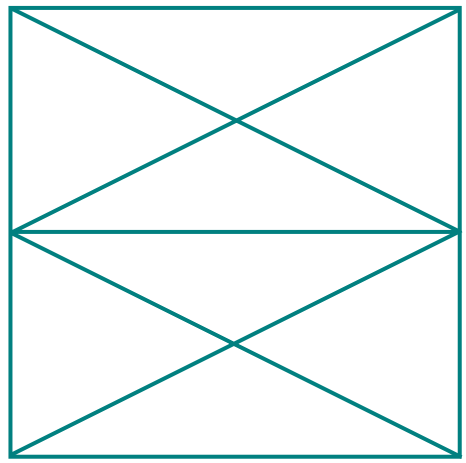


Figura 2

Actividad 5

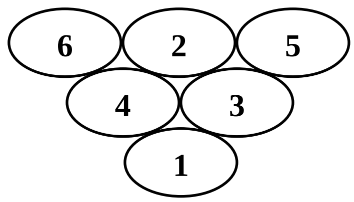
Halla la cantidad máxima de dinero en monedas (de 1¢, 5¢, 10¢, 25¢, 50¢), que puedes tener en tu bolsillo sin que puedas dar cambio para ninguna de ellas o de $1.00.

Actividad 6

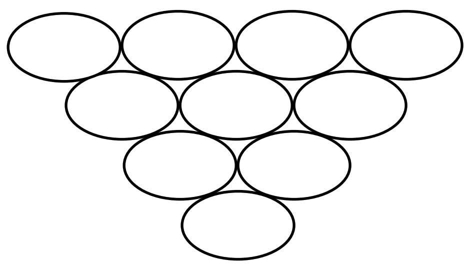
Dibuja 3 líneas rectas en la cara de un reloj de forma tal que la dividas en 3 regiones dónde todos los números que aparezcan sumen la misma cantidad.

Actividad 7

Podemos colocar los enteros del 1 al 6 formando un triángulo de diferencias. La diferencia de dos números es igual al número que les queda debajo.



Coloca los números del 1 al 10 en un triángulo de diferencias.



Actividad 8

Una abeja macho nace de un huevo sin fertilizar mientras la abeja hembra nace de uno fertilizado. Así, la abeja macho tiene madre solamente, mientras la hembra tiene madre y padre. Si trazamos el árbol genealógico de una abeja macho 10 generaciones atrás, ¿cuántos ancestros tuvo en esas 10 generaciones?

Actividad 9

En una orilla de un río hay 3 caníbales y 3 misioneros que van a cruzar el río en un bote. En cualquier momento que haya más caníbales que misioneros en un grupo, los primeros se comerán a los segundos. ¿Cómo pueden cruzar el río si en el bote pueden ir a lo más 2 personas, sin que se coman un misionero? ¿Cuál es el número menor de viajes que pueden hacer?

Caminos y Circuitos

Objetivo: **Utilizar el teorema de Euler en situaciones prácticas**

Materiales: **Materiales preparados por el maestro**

INTRODUCCIÓN

En el mundo de hoy la comunicación ha adquirido una importancia nunca antes vista. El futuro se ve en términos del desarrollo de la informática y su manejo. Este nuevo mundo de la informática requiere el uso de la Matemática Discreta para resolver problemas por medio de la programación y la ciencia de computadoras.

En los 60, la ciencia de computadoras era prácticamente desconocida como una posible concentración en los estudios de bachillerato. Hoy en día es una de las concentraciones más populares en las universidades, y el estudio de la computadora se requiere en múltiples facultades. Este desarrollo de las ciencias de la computación ha hecho que muchos de los temas de la matemática discreta se hagan imprescindibles en los currículos preuniversitarios.

Tanto en los estándares producidos por la NCTM como en los estándares curriculares incluidos en el Marco Curricular del Departamento de Educación, la Matemática Discreta se incluye en el nivel de Escuela Superior.

Recomendaciones de la NCTM (9-12) para todos los estudiantes:

- Representar situaciones problemáticas utilizando estructuras discretas como grafos finitos, matrices y relaciones recurrentes.
- Representar y analizar grafos finitos utilizando matrices.
- Desarrollar y analizar algoritmos.
- Resolver problemas de conteo y probabilidad finita.

Recomendaciones del Departamento de Educación (10-12) para todos los estudiantes:

- Emplear el pensamiento recursivo.
- Representar y analizar grafos finitos.
- Modelar y resolver problemas de naturaleza discreta, tales como grafos finitos, sucesiones y relaciones de recurrencia.

En ninguna de las recomendaciones se indica la creación de un curso especial de Matemática Discreta. Aunque en ambas se recomienda que estos temas se incluyan en el currículo de Escuela Superior y que su profundidad dependa de la profundidad del curso en el que se integren.

Esta actividad de grafos por su simplicidad puede ser incorporada en la mayoría de los cursos de escuela superior y puede servir de inicio al desarrollo de otros aspectos de la teoría de grafos de mayor profundidad.

Entre las características de esta actividad se destaca que tiene múltiples aplicaciones prácticas. Provee modelos que sirven para resolver problemas reales en muchas áreas de las ciencias sociales y la comunicación. Además, es accesible a todos los estudiantes. No tiene prerrequisitos y puede incorporarse fácilmente en diversos momentos de cualquier curso. Unos pocos elementos de Aritmética y de Geometría es todo lo que se necesita. Reta y motiva a todos los estudiantes. También se presta para implantar muchas de las recomendaciones de los estándares en términos de exploración, experimentación y resolución de problemas.

PROCEDIMIENTO

1. La clase debe comenzar con la lectura o la representación del caso de la desaparición de las joyas de la condesa. Después de esta lectura, el maestro debe entregar el mapa y recalcar la importancia de responder a las dos preguntas que aparecen al final de la lectura. Debe obtener las respuestas de todos los estudiantes y hacer una tabla con ellas. Esta tabla debe guardarse para compararla con las respuestas que se obtendrán cuando termine la actividad.

   Materiales: -El caso de las joyas de la condesa
   -El mapa de Sherlock

2. Debe haber un tiempo corto de clase dirigida en que el maestro explique a los estudiantes el significado del vocabulario básico que se utilizará en la actividad. Debe **recalcar** que un camino euleriano implica que el grafo puede trazarse sin levantar el lápiz del papel y sin trazar dos veces ninguna arista y que un circuito debe terminar en el mismo vértice en que comienza.

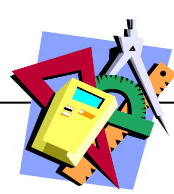
   Materiales: -Caminos y circuitos

3. A continuación, los estudiantes deben trabajar en grupos y el maestro moverse entre ellos para aclarar y responder preguntas. Sería conveniente aprovechar un momento cuando los estudiantes estén trabajando con la tabla para insistir sobre la definición de "vértice de grado impar".

Grafo #	Camino Euleriano	Circuito Euleriano	Vértices de grado impar
	(sí o no)	(sí o no)	(¿cuántos?)
1	sí	no	2
2	sí	sí	0
3	no	no	4
4	no	no	no conectado
5	no	no	4
6	sí	no	2
7	sí	sí	0

Materiales: -Caminos y circuitos eulerianos
-El teorema de Euler

4. **Cuando los estudiantes terminen la tabla y hayan contestado las preguntas, el maestro debe construir poco a poco el teorema de Euler utilizando la contribución de todos los grupos. (Puede nombrar el teorema con los nombres de los que contribuyeron a producirlo). Este paso es el más importante, pues es la generalización del proceso inductivo que han llevado a cabo los estudiantes. Deben ver el teorema como producto de su esfuerzo de razonamiento en común. Los estudiantes pueden expresar el teorema de formas variadas y originales que deben respetarse.**



TEOREMA DE EULER

Un grafo conexo tiene un circuito euleriano si y sólo si todos sus vértices son de grado par.

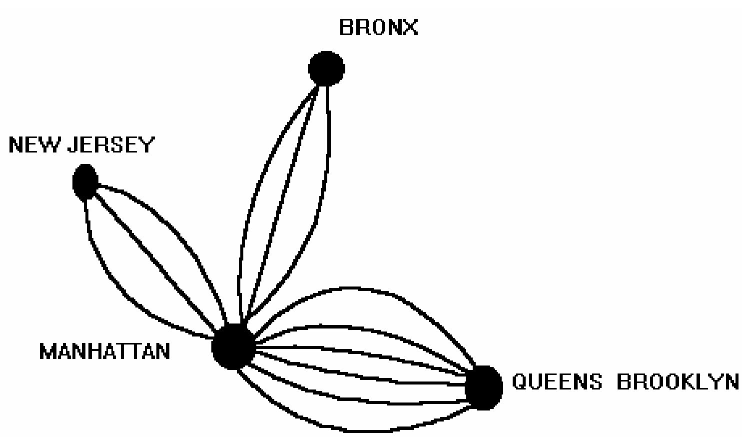
Un grafo conexo tiene un camino euleriano si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

5. Una vez producido el teorema, los estudiantes deben aplicarlo a una situación real como los puentes de Koninsberg u otra más conocida. Es importante que en este momento los estudiantes puedan traducir la situación real a un esquema de grafos. Este trabajo se debe llevar a cabo en grupos con la supervisión del maestro.

   Materiales: -Los puentes de Manhattan

6. Cada grupo debe presentar a la clase su construcción del grafo y la solución del problema. El maestro debe actuar como moderador de la discusión hasta que la clase se decida por el grafo correcto y la justificación adecuada al problema.

Representación del problema por medio de un grafo:



7. En este momento los grupos deben de nuevo considerar el mapa de Sherlock y decidir donde están las joyas y quiénes son los posibles culpables. El maestro debe pedirles que justifiquen su respuesta con lo que han aprendido.

8. Cada grupo debe presentar sus respuestas y justificaciones al resto de la clase. El maestro debe aprovechar la ocasión para comparar las nuevas respuestas con las que se obtuvieron al principio y recibir una pequeña evaluación oral de la actividad.

9. Una respuesta posible es que el ladrón se encontraba fuera de su casa en el momento en que comenzó el aguacero. Por lo tanto hizo marcas adicionales para evitar que sospecharan de él. Pero las huellas indican que quien hizo las marcas estaba en casa de la condesa o del mayordomo cuando comenzó a llover. Si cada uno amaneció en su casa, entonces sólo el mayordomo o la condesa pudieron hacer la arista que convirtió la casa de la condesa y la del mayordomo en los únicos vértices impares.

***Esta actividad fue traducida y adaptada del Leadership Program in Discrete Mathematics sponsored by the Rutgers University Center for Mathematics, Science, and Computer Education (CMSCE) and the Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science (DIMACS)(1996). El programa fue fundado por la National Science Foundation (NSF), DIMACS, and Rutgers University. El mismo es dirigido por J.G. Rosenstein and V.A. DeBellis.**

ACTIVIDAD CAMINOS Y CIRCUITOS

INTRODUCCIÓN

En esta actividad vas a trabajar como si fueras un detective que utiliza las matemáticas para resolver los crímenes más complicados. Verás cómo en el caso de las joyas de la condesa la mátematica te ayudará a encontrar las joyas y a reducir la lista de sospechosos a dos. Después, sólo quedaría hallar el verdadero culpable. *¡Suerte en tu investigación!*

EL CASO DE LAS JOYAS DE LA CONDESA

-¡AUXILIO! ¡SOCORRO! Llamen a la policía. ¡Me han robado mis joyas!

Así gritaba la condesa desde su habitación ese domingo por la mañana cuando el cocinero, el ama de casa, el chofer y el mayordomo se despertaron sobresaltados en sus respectivas casas. Inmediatamente sospecharon unos de otros, pero ya la condesa había telefoneado al señor Sherlock, el detective local. Antes de que pudieran vestirse y salir de sus casas, el famoso hombre de la pipa había llegado y tomado nota de ciertas huellas en los jardines, que le parecieron sospechosas.

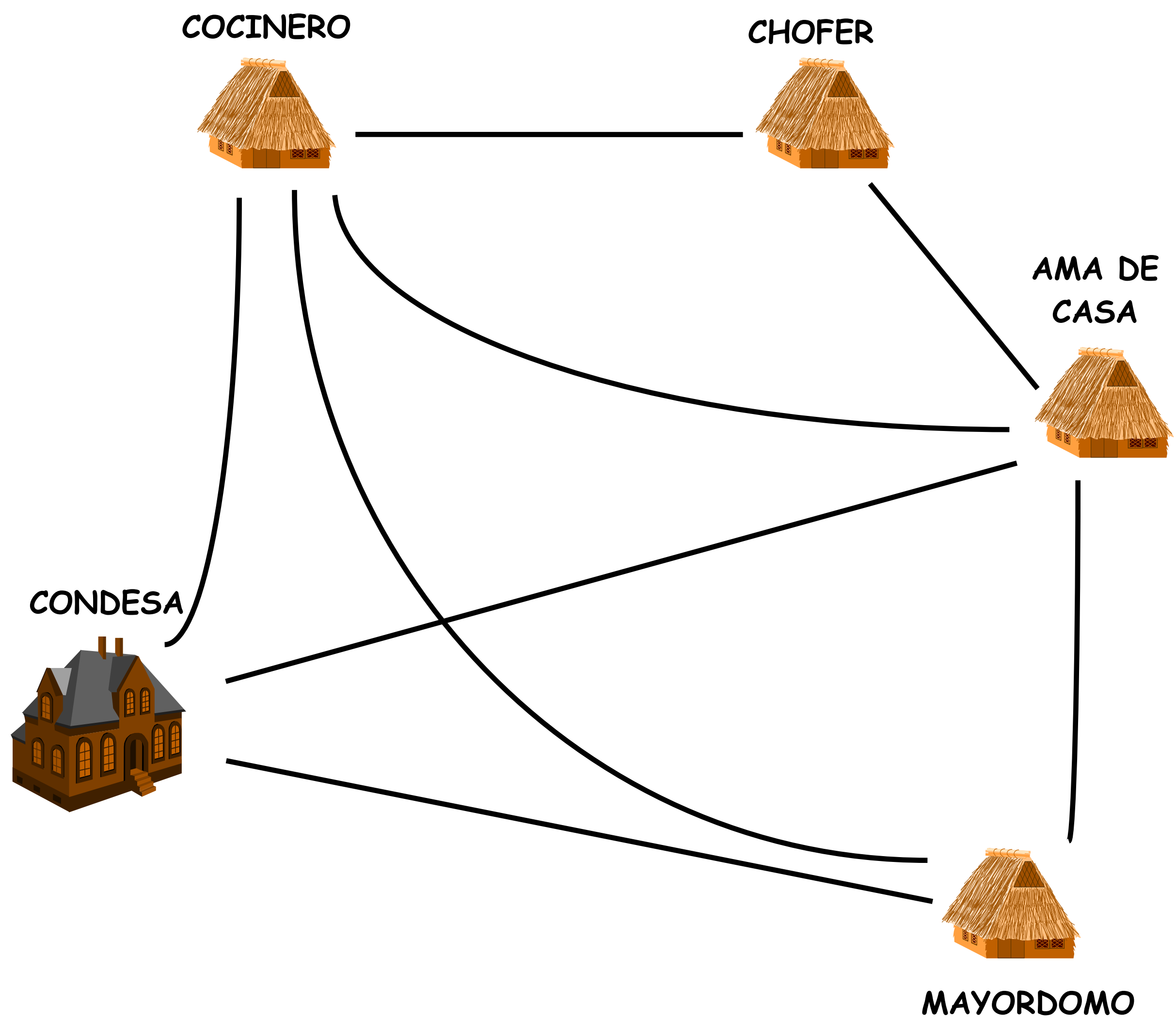
Cuando entrevistó a los empleados todos dijeron que la noche anterior se habían retirado temprano a sus respectivas casas y que, debido al gran aguacero que había caído después, no habían vuelto a salir hasta que fueron citados por Sherlock. La condesa dijo haber oído ruidos durante la noche, pero lo había atribuido al viento. Los demás empleados insistieron en que ellos también habían oído ruidos en sus casas. Definitivamente, alguien mentía.

Después de oír los alegatos y revisar el mapa que había hecho al llegar a la residencia, el señor Sherlock se dirigió directamente a la casa donde estaban escondidas las joyas. Sólo le faltaba decidir quién de los dos sospechosos podía haberlas robado.

Analiza el mapa dibujado por el señor Sherlock indicando la trayectoria de la huellas, y responde las preguntas siguientes:

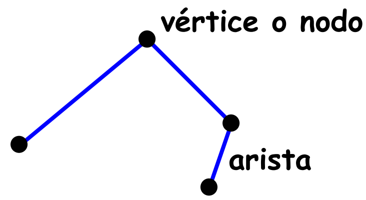
1. ¿Dónde estaban escondidas las joyas?
2. ¿Quiénes son los dos sospechosos?

MAPA DE SHERLOCK

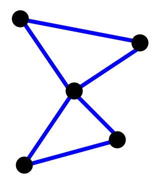


Definiciones básicas:

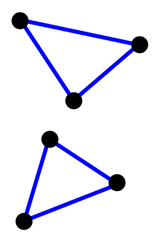
1. Un ***camino*** es una secuencia de aristas que unen vértices o nodos en un grafo. Cada arista comienza donde otra termina (con la posible excepción de la primera y la última).



2. ***Grafo conexo*** es un grafo en el que es posible ir de un vértice a cualquier otro vértice siguiendo un camino.



3. ***Grafo inconexo*** es un grafo donde se pueden conseguir dos vértices que no están unidos por un camino.



4. ***Grado del vértice*** corresponde al número de aristas que inciden en un vértice.

5. ***Camino Euleriano*** es un grafo conexo que usa cada arista exactamente una vez. Los vértices pueden repetirse, pero no las aristas.

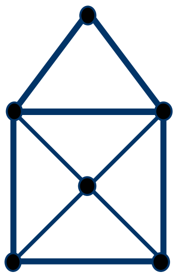
6. ***Circuito Euleriano*** es un Camino Euleriano que termina en el vértice en que comienza.

Nota: Un grafo tiene un Camino Euleriano si puede ser trazado sin levantar el lápiz del papel y sin trazar dos veces ninguna arista.

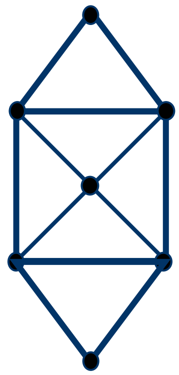
Caminos y Circuitos Eulerianos

¿Cuáles de los grafos siguientes se pueden trazar (partiendo de cualquier vértice) sin levantar el lápiz del papel y sin marcar más de una vez ninguna de las aristas?

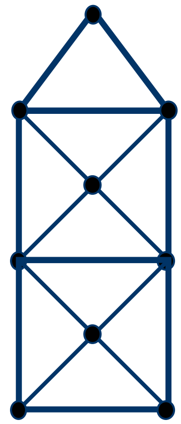
1.



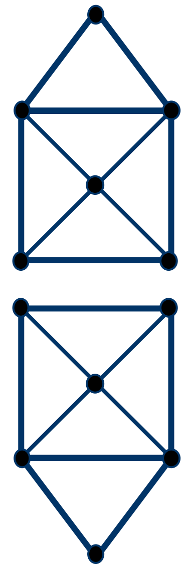
2.



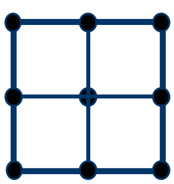
3.



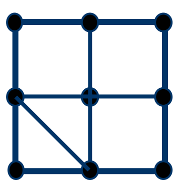
4.



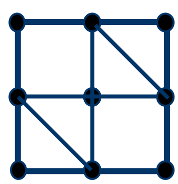
5.



6.



7.



El teorema de Euler

Completa la tabla siguiente utilizando tus resultados del ejercicio anterior.

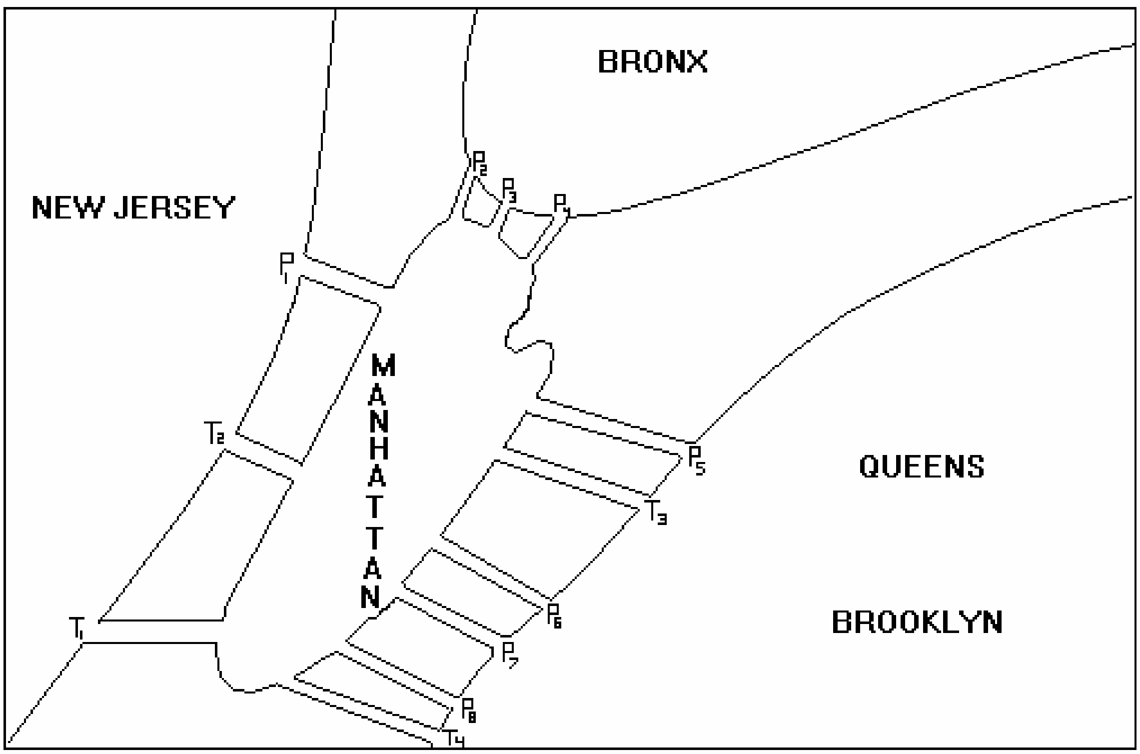
Grafo #	**Camino Euleriano**	**Circuito Euleriano**	**Vértices de grado impar**
	(sí o no)	(sí o no)	(¿cuántos?)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

¿A qué conclusiones puedes llegar y por qué?

Si fueras a escribir un teorema que generalizara tus conclusiones, ¿cómo lo escribirías?

Los puentes de Manhattan

¿Es posible para una persona que sale de New Jersey cruzar cada uno de los puentes y túneles que aparecen en este mapa y terminar en el Bronx? Traza el camino que se debe seguir. Utiliza un grafo con vértices (masas de tierra) y aristas (puentes y túneles) para justificar tu respuesta.



Usando Internet para enriquecer el currículo de matemáticas

¿Qué dice la NCTM sobre la integración de la tecnología a la sala de clases?

Principio de Tecnología

"La tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la misma influye las matemáticas que se enseñan y mejora el aprendizaje de los estudiantes."

- La tecnología electrónica (calculadoras y computadoras) nos ayuda a visualizar las ideas matemáticas, organizar y analizar información y hacer cómputos de una forma más eficiente y exacta.
- Nos deja más tiempo para poder enfocar en la toma de decisiones, la reflexión, razonamiento, la solución de problemas y trabajar con altos niveles de pensamiento.
- No reemplaza al maestro ni los entendimientos matemáticos.

- La existencia, versatilidad y el poder de la tecnología hacen necesario el reexaminar qué matemáticas deben aprender los estudiantes y cuál es la mejor forma de aprenderla.
- Hay que saber cuándo y cómo se utilizará para sacarle el mayor provecho.
- Nos da más opciones para la educación a estudiantes con necesidades especiales.

Usos De La Internet Para La Sala De Clases

- **Bancos de datos**

  Nos brindan la oportunidad de buscar y hallar información actualizada sobre cualquier tema de interés sin importar la hora o lugar del mundo.

- **Experiencias interactivas**

  Estas permiten que los estudiantes tengan acceso a problemas y situaciones de estudio de una forma interactiva, donde se incluyen vídeos, textos, sonidos y eslabones a fuentes de información inmediata.

- **Correo electrónico**

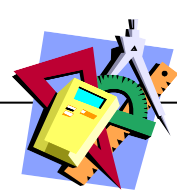
  Es una herramienta poderosa para comunicarse con quien desees en cualquier lugar del mundo y en todo momento.
  Fomenta la escritura y lectura, destrezas de comunicación, entre otras, que aportan a discusiones de temas de interés.

Algunas Máquinas De Búsqueda

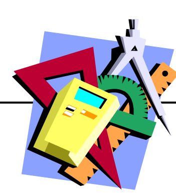
- Google
- Yahoo
- Altavista

Para su beneficio, hemos identificado una cantidad de direcciones electrónicas que puede accesar para buscar información referente a temas de matemáticas. Desde biografías de matemáticos famosos hasta actividades interactivas. Esperamos le sean de utilidad y que las mismas le lleven a otras direcciones.

•http://www.nctm.org – National Council of Teachers of Mathematics, Organización de Estados Unidos K-12
•http://www.matematicas.net -
•http://www.c3.Lanl.gov/mega-math/
•http://www.siam.org/mii/miihome.htm
•http://math.rice.edu/~lanius
•http://pbskids.org/zoom
•http://math.about.com – Artículos y sitios para conectarse
•http://www.math.hmc.edu/funfacts – Retos que pueden usarse para comenzar la clase de matemáticas
•http://www.learner.org/teacherslab/math/patterns/index.html
•http://www.nsta.org/programs/laptop
•http://www.shodor.org/interactive/activities/index.html
•htpp://d1.dir.scd.com/science/mathematics/
•http://www.pbs.org/teachersource/
•http://www.mathtype.com
•http://www.FunBrain.com – "Quiz-Lab" – Nivel k-8, más de 40 juegos
•http://ericae.net
•http://www.thejournal.com
•http://www.keypress.com – Key Currículo Press: nuevo "software" para enseñar matemáticas de escuela superior – "Fathom Dynamic Statistics Software"
•http://ustimss.msu.edu – "TIMSS International Currículo Análisis Database" contiene archivos de datos del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias



•http://www.edgate.com – "Copernicus Education Gateway" es una red de conexiones para las comunidades educativas de grados k-12 y una fuente para maestros, estudiantes y familias
•http://www.-sci.lib.uci.edu/HSG/RefCalculators.html – Centro de calculadoras que se conecta con más de 9,600 sitios interactivos
•http://www.amazon.com – Librería para conseguir buenos libros de educación
•http://www.maa.org – Mathematical Association of America
•http://www.amstat.org – American Statistical Association
•http://www.siam.org – Society for Industrial and Applied Mathematics
•http://www.ams.org – American Mathematical Society
•http://www.ams.org/careers/
•http://forum.swarthmore.edu/maw/97/
•http://ddlp.uprr.pr/
•http://comunidadvirtual.uprr.pr/
•http://www.cut-the-knot.com/recurrence/hanoi.html
•http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal_hsdiscans.html
•http://www.mathsyear2000.org/explorer/patterns/index.html



Resumimos

La Internet es una herramienta versátil que nos ayuda, como maestros de matemáticas, a:

-estar al día en nuestra área de trabajo, hacer grupos de estudio (desarrollo profesional)

-tener más alternativas para la planificación de nuestras clases

-conocer qué están haciendo otros colegas en y fuera de Puerto Rico

-tener comunicación con instituciones, organizaciones, asociaciones, etc.

-desarrollar y fomentar en nuestros estudiantes destrezas de comunicación y altos niveles de pensamiento

-proveer experiencias interactivas donde los estudiantes aprenden a la vez que disfrutan y hacen matemática

-tener más tiempo para dedicarlo a conocer el entendimiento matemático de los estudiantes

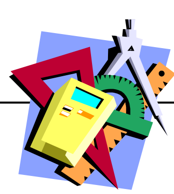
-dedicar más tiempo para conceptuar, analizar y llegar a conclusiones, a generalizaciones

-llevar conceptos abstractos a un plano más concreto a través de las simulaciones

-integrar a los padres en el proceso educativo de sus hijos

-desarrollar una comunidad de aprendizaje entre nuestros estudiantes y nosotros los maestros

-motivar a nuestros estudiantes en el estudio de las matemáticas



Investigación

¿Qué es?

La investigación es un procedimiento reflexivo, sistemático y controlado que permite descubrir nuevos datos, hechos, relaciones o propiedades. El propósito fundamental de la investigación es hallar respuestas determinadas para las interrogantes que se formulan.

La investigación consiste de:

- Formular y definir el problema
- Formular la hipótesis
- Recopilar datos, elaborar experimento o demostrar
- Analizar la conclusión

En matemáticas, el razonamiento inductivo es el más utilizado para descubrir; sin embargo, para demostrar la hipótesis se usa el razonamiento deductivo.

Objetivos de una investigación

1. Desarrollar las destrezas básicas del razonamiento.
2. Integrar la observación, la formulación de una hipótesis, la inferencia y la abstracción.
3. Aplicar el razonamiento inductivo y el deductivo en la investigación matemática.
4. Desarrollar los procesos de comprensión, análisis y síntesis.
5. Desarrollar las destrezas necesarias para construir modelos del sistema estudiado que le permitan explicar el fenómeno y predecir nuevos resultados verificables.
6. Estimular al estudiante a transferir el método científico a la resolución de problemas.

Componentes de una propuesta de investigación

1. Título
2. Resumen breve
   a. problema
   b. hipótesis
   c. metodología
   d. hallazgos
3. Introducción
4. Problema
5. Propósito
6. Hipótesis
7. Metodología
8. Conclusión
9. Bibliografía

¿Qué podemos investigar en las matemáticas?

1. Teoremas

Algunos teoremas tienen la forma: Si..., entonces...
Se puede investigar bajo qué condiciones el recíproco es cierto.

2. Conceptos

Un buen tema de investigación es estudiar un concepto y tratar de generalizarlo.

3. Reconocer patrones

La búsqueda de patrones es esencial en las matemáticas. El reconocer patrones conlleva a formular una hipótesis y probarla.

Posibles temas para proyectos

1. Investigar los cinco sólidos Platónicos
2. Aplicación de la matemática en el arte
3. Analizar el triángulo de Pascal
4. Investigar la razón dorada y su uso en el arte
5. Investigar la teoría de la perspectiva en el arte
6. Investigar la sucesión de Fibonacci
7. Explorar los fractales
8. Estudiar las sucesiones armónicas y sus propiedades
9. Estudiar los polióminos
10. Investigar los cuadrados mágicos
11. El uso del origami y los conceptos geométricos