Estadística

INTRODUCCIÓN

En nuestro diario vivir estamos constantemente expuestos a situaciones que nos llevan a tomar decisiones. Estas deben ser tomadas a base de la mayor información disponible. Es importante que los estudiantes tengan experiencias en las cuales obtengan (recopilen o recojan), organicen, procesen, analicen y presenten datos para ayudarlos en su toma de decisiones tanto en su vida personal como laboral (estudiantil).

A través de tablas, gráficas de barra y circulares, diagramas de dispersión y caja y bigotes e histogramas, podemos representar y comunicar información valiosa. También, las medidas de tendencia central y dispersión nos ayudan a interpretar y resumir los datos presentados. y a su vez solucionar problemas. Es indispensable seleccionar y usar métodos estadísticos apropiados con el objetivo de hacer inferencias y predicciones.

Las estadísticas nos proveen herramientas útiles al momento de hacer investigaciones, tanto científicas como sociales, y se integra excelentemente con funciones algebraicas, ya que nos provee un método para determinar la relación que existe entre dos variables.

Construcción e interpretación de gráficas

ACTIVIDAD GRÁFICAS ENGAÑOSAS

Objetivos: **Interpretar un diagrama.**
Construir una gráfica que se ajuste mejor a los datos.

RESPUESTAS

1. El tamaño de los maníes. La proporción entre el tamaño del maní y la producción de maní. Si observamos en 1970 hubo una producción de maní de 2.9 billones de libras mientras que en 1990 hubo 3.6 billones de libras y en 1995, 3.5 billones de libras. Sin embargo, el maní que representa la producción del año 1970 es de igual tamaño al del 1990 y más grande que el del año 1995.

ACTIVIDAD ¿CUÁL ES LA MEJOR GRÁFICA?

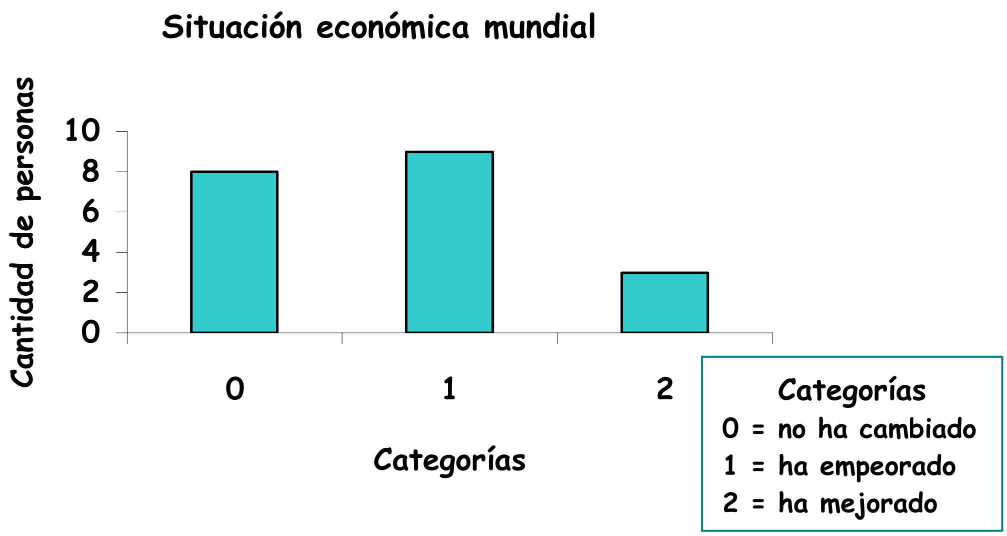
Objetivos: **Determinar la frecuencia relativa de datos obtenidos.**
Construir una gráfica de barra y una circular.
Comparar dos tipos de gráficas y determinar cuál de ellas es más fácil de interpretar los datos obtenidos.

RESPUESTAS

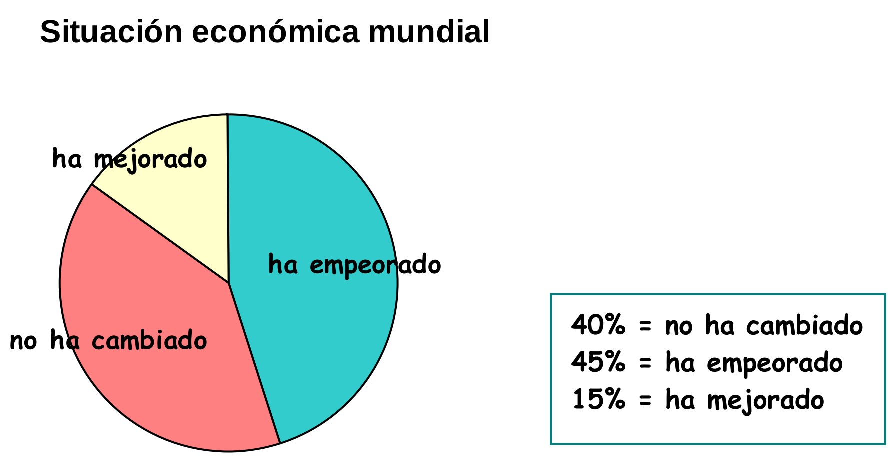
1.

Categorías	Frecuencia relativa
0 = no ha cambiado	8
1 = ha empeorado	9
2 = ha mejorado	3

2.



3.



ACTIVIDAD EVALUANDO LIBROS

Objetivos: **Interpretar una gráfica de barra.**
Diferenciar entre un histograma y una gráfica de barra.

RESPUESTAS

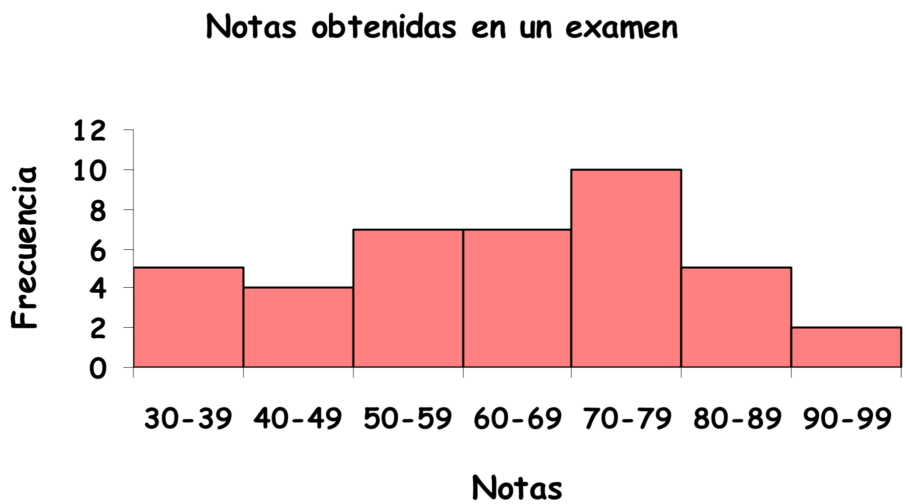
c. Es una gráfica de barra.
Una ***gráfica de barra*** es una manera de representar gráficamente la distribución de frecuencia de variables categóricas. (Por eso las barras están separadas, por categorías.)
Un ***histograma*** es la representación gráfica de la distribución de frecuencia de una variable cuantitativa. (No hay espacio entre las barras).

ACTIVIDAD PUNTUACIONES DE UN EXAMEN

Objetivos: **Construir e interpretar un histograma.**
Estimar la media.
Hallar la mediana.

RESPUESTAS

1.



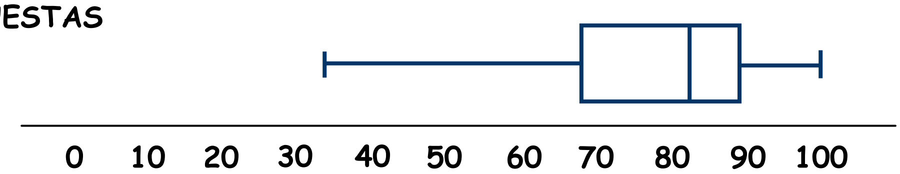
2.

a. Fue la clase donde más cantidad de estudiantes obtuvieron esas notas.
b. 17 estudiantes
c. Aproximadamente 16 estudiantes.
d. 18%
e. 64
f. En la 60-69. (Xmed = 62.5)

ACTIVIDAD DIAGRAMA DE CAJA Y BIGOTES

Objetivo: **Aprender a construir un diagrama de caja y bigotes.**

RESPUESTAS



Xmin = 34, Q_1 = 68.5, Q_2 = Xmed = 83, Q_3 = 89.5, Xmax = 100

ACTIVIDAD LA HELADERÍA

Objetivos: **Construir un diagrama de caja y bigotes utilizando la calculadora gráfica.**
Interpretar la gráfica.

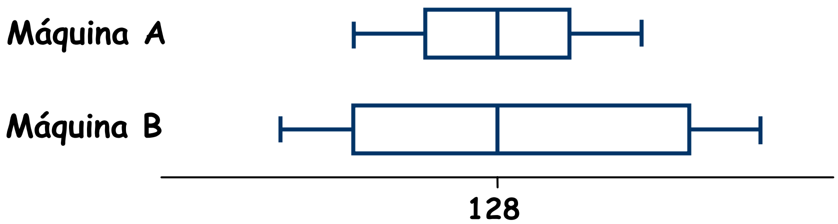
Materiales: **Calculadora gráfica**

PROCEDIMIENTO

1. Divida la clase en parejas.
2. Repase los conceptos de cuartilo y mediana, de ser necesario.

RESPUESTAS

1.



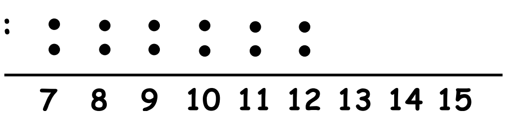
2. Máquina A: La distribución tiene menos variabilidad.
3. Suponga que los promedios son iguales, el comportamiento es el mismo. Tiene que considerar la variabilidad o dispersión de las medidas en ambas máquinas.

ACTIVIDAD LA DISTRIBUCIÓN DE LOS DATOS Y LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Objetivos: **Construir un diagrama de puntos. Determinar la media, la moda y la mediana.**

RESPUESTAS

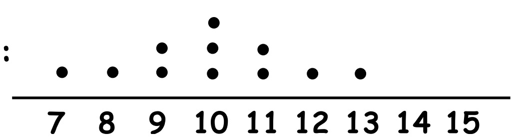
A:



Distribución uniforme

$\bar{x}$ = 9.5, moda = no tiene, med = 9.5

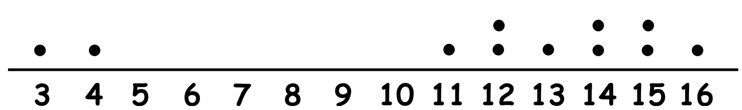
B:



Distribución simétrica

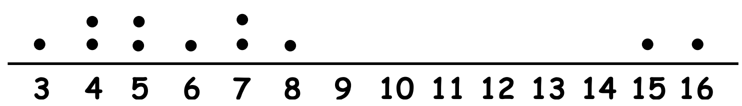
$\bar{x}$ = 10, moda = 10, med = 10

C:



Sesgo a la izquierda. $\bar{x}$ = 11.73, moda = 12, 14 y 15, med = 13

D:



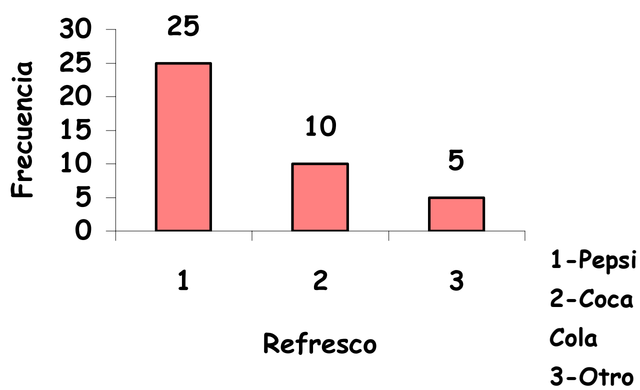
Sesgo a la derecha. $\bar{x}$ = 7.27, moda = 4 y 5, med = 6

ACTIVIDAD CONSTRUYENDO GRÁFICAS

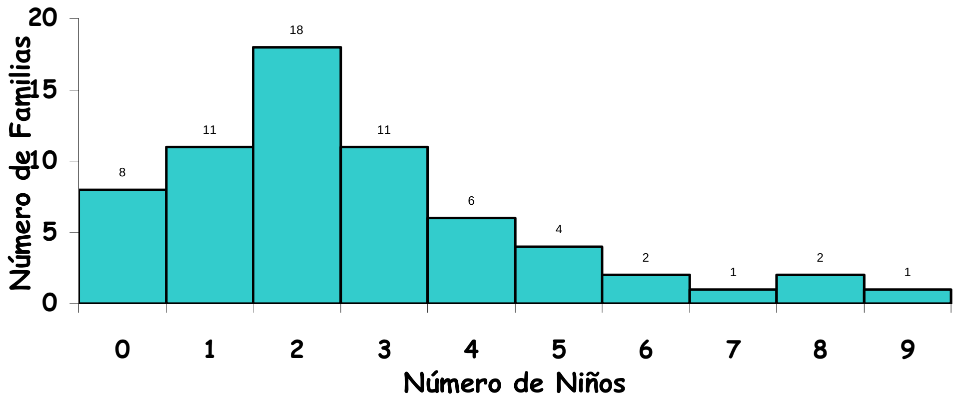
Objetivo: **El estudiante construirá una gráfica de barra, un histograma y un diagrama de tallo y hojas con diferentes conjuntos de datos.**

RESPUESTAS

1. **Encuesta de refrescos**



2. **Número de Niños por Familia**



3. **Diagrama de tallo y hojas**

3	8 6 9
4	7
5	7 1 6 3 5 1 0 5
6	2 4 7 3 6 4 0 9 8 0
7	0 5 1 0 9 8 0
8	5 9 1 7 0 3 6
9	9 9 5 8

ACTIVIDAD SELECCIONA EL COLOR

Objetivo: **Los estudiantes construirán dos gráficas reales.**

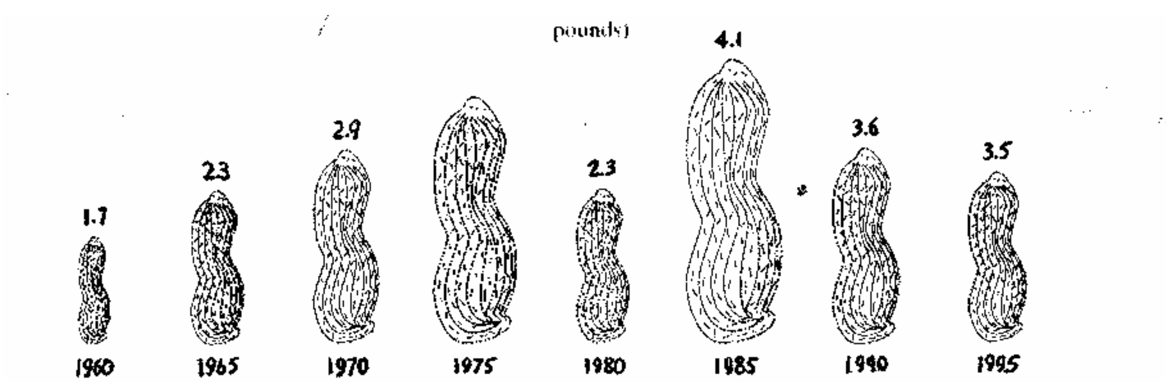
Materiales: **Fruit Loops, compás, cartulina, cesta**

RESPUESTAS

Los resultados dependerán de los datos recogidos.

La gráfica siguiente, de la producción de maní en los Estados Unidos de América, puede ser engañosa si no se examina con cuidado.

Producción de Maní en los Estados Unidos de América
(en billones de libras)



1. Explica por qué la ilustración puede ser engañosa para algunos lectores.

2. Construye una gráfica que ilustre mejor la producción de maní durante los años provistos. Explica.

ACTIVIDAD ¿CUÁL ES LA MEJOR GRÁFICA?

Se seleccionaron veinte (20) personas al azar y se les preguntó sobre la situación económica mundial. Se utilizaron las categorías siguientes:

0 = no ha cambiado

1 = ha empeorado

2 = ha mejorado

A continuación se muestran las respuestas obtenidas:

1, 0, 0, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 2, 0, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 1, 0

1. Determina la frecuencia relativa para cada una de las categorías.
2. Muestra tus resultados en una gráfica de barra.
3. Muestra tus resultados en una gráfica circular.
4. ¿Cuál de las dos gráficas es más fácil de interpretar? ¿Por qué?

ACTIVIDAD EVALUANDO LIBROS

Una muestra aleatoria de 375 libros en historia, geografía y otras áreas de estudio fueron seleccionados para ser evaluados. La evaluación constó de las categorías siguientes:

1: no lo recomendaría

2: quizás lo recomendaría

3: poca o ninguna preferencia

4: favorable / recomendado

5: excelente / contribución significativa

Muchos bibliotecarios dependen de las críticas que reciben los libros para determinar qué libros nuevos comprarán para sus bibliotecas.

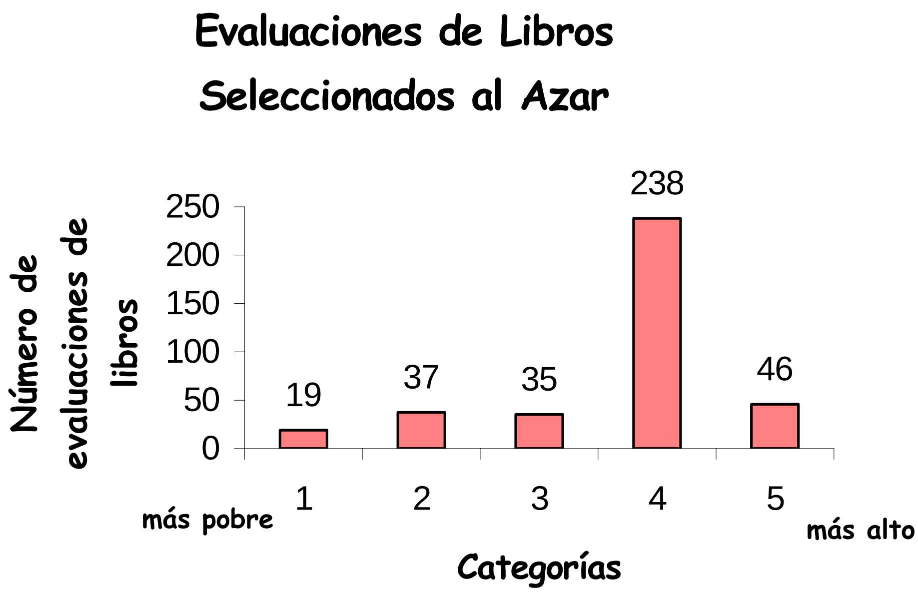
a) Interpreta la gráfica.

b) Comenta acerca de la aseveración siguiente:

"una mayoría (más del 75%) de los libros criticados
fueron evaluados favorablemente y
recomendados para ser comprados"

c) ¿Será esta gráfica un histograma o gráfica de barras? ¿Por qué?

Un resumen de los datos está provisto en la gráfica siguiente:



ACTIVIDAD PUNTUACIONES DE UN EXAMEN

Considera estos datos que representan las notas de un examen.

30	40	52	58	63	72	78	84
32	44	53	60	67	72	78	86
36	46	54	60	68	74	78	88
38	48	55	60	70	76	80	92
39	50	57	62	72	78	82	98

1. Construye un histograma en la calculadora.
2. Utiliza éste para contestar las preguntas siguientes:
    a. ¿Qué interpretación tiene la quinta barra?
    b. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron al menos 70?
    c. ¿Cuántos estudiantes a lo sumo obtuvieron 65?
    d. ¿Qué por ciento de los estudiantes obtuvieron una puntuación entre 50 y 59?
    e. Estima el valor de la media.
    f. ¿En qué clase se encuentra la mediana?

ACTIVIDAD DIAGRAMA DE CAJA Y BIGOTES

Este tipo de gráfica se utiliza para mostrar gráficamente la variación en un conjunto de datos.

Ejemplo: **datos**

25	41	27	32	43
66	35	31	15	5
34	26	32	38	16
30	38	30	20	21

PROCEDIMIENTO

Paso 1: ***Ordena los datos en forma ascendente***

5 15 16 20 21 25 26 27 30 30 31 32 32 34 35 38 38 41 43 66

Paso 2: ***Determina la mediana***

5 15 16 20 … 30 31 32 32 … 66

Xmed = 30.5

Note que: 50% datos < Xmed < 50% datos

Paso 3: ***Calcula la mediana del 50% de los datos que es menor a la mediana***

5 15 16 20 21 25 26 27 30 30

23

Paso 4: ***Repite #3 para el otro 50% de los datos***

31 32 32 34 35 38 38 41 43 66

36.5

Nota: Las medianas obtenidas en los pasos #3 y #4 las llamamos **cuartilas** ***(cuartil)*** y las representamos por $\mathbf{Q_1}$ y $\mathbf{Q_3}$, respectivamente.

$Q_1 = 23$, $Q_2 = Xmed = 30.5$, $Q_3 = 36.5$

Las cuartilas dividen a los datos en cuatro partes iguales

5 15 16 20 21 * 25 26 27 30 30 * 31 32 32 34 35 * 38 38 41 43 66

$Q_1 = 23$ $Q_2 = 30.5$ $Q_3 = 36.5$

Observaciones

Un conjunto de datos tiene tres cuartilas

25% datos < Q_1 < 75% datos

50% datos < Q_2 < 50% datos

75% datos < Q_3 < 25% datos

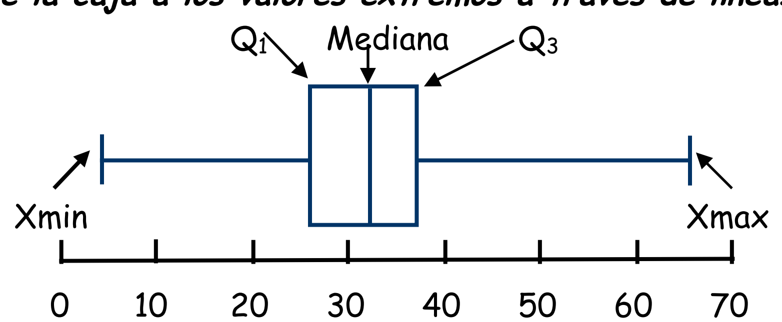
Paso 5: ***Halla los valores máximo y mínimo***

Xmin = 5 y Xmax = 66

Paso 6: ***Traza un eje horizontal en donde los valores obtenidos en los pasos #2-#4 puedan ser localizados. Sobre este eje marca las cuartilas y los valores extremos (paso #5).***

0 10 20 30 40 50 60 70

Paso 7: ***Conecta las cuartilas de manera que se forme una caja. Entonces une la caja a los valores extremos a través de líneas.***



Ejercicio: A continuación se muestran las puntuaciones de un examen de estadísticas. Construye un diagrama de caja y bigotes.

88	67	64	76	86
85	82	39	75	34
90	63	89	90	84
81	96	100	70	96

¿Qué puedes interpretar del diagrama con respecto a las puntuaciones del examen?

ACTIVIDAD LA HELADERÍA

Unas máquinas, de cierta heladería, introducen un galón (128 oz.) de mantecado en cada envase. Se tomó una muestra de 9 envases de dos máquinas y se midió el contenido de mantecado en cada muestra. Los datos correspondientes a dos máquinas, **A** y **B**, se ilustran a continuación:

Máquina A	128.0	128.5	127.5	127.0	128.0
	127.5	128.0	128.5	129.0	
Máquina B	127.0	128.0	129.5	128.5	130.0
	129.0	128.0	126.0	127.0	

1. Construye un diagrama de caja y bigotes ("boxplot") para cada máquina.
2. Basado en ambas gráficas, ¿qué máquina está realizando un mejor trabajo? Explica.
3. Un supervisor de producción alega que ambas máquinas están trabajando bien debido a que ambas envasan en promedio un galón de mantecado en cada recipiente. ¿Qué está mal con este alegato?
4. En el análisis de los datos es importante identificar ***valores atípicos*** ("outliers"), ***valores que están muy afuera del patrón general observado en el conjunto de los datos***. Un valor atípico requiere cierta atención especial: éste podría ser el resultado de un error de medición o recopilación, un elemento de otra población diferente a la del resto de los datos, o simplemente un valor extremo poco usual. Observa que un valor extremo no necesariamente es un valor atípico, podría más bien indicar la existencia de sesgo.

   Cuando se halla un valor atípico, su causa debe ser determinada si es posible. Si se descubre que este valor es debido a un error de medición o de recopilación o por otra razón por la cual es claro que el dato no pertenece al conjunto, entonces éste puede ser removido. Sin embargo, si no hay explicación aparente para la concurrencia de este valor, entonces la decisión de retener o remover el dato debe hacerse después de un minucioso análisis por parte del investigador.

Podemos usar los cuartilos y la amplitud intercuartílica ("IQR") como herramientas diagnósticas que nos permiten identificar valores atípicos.

Definición: Un valor X tal que

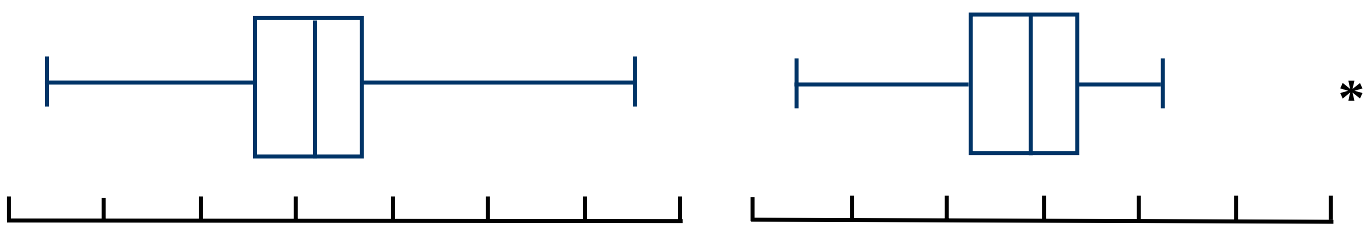
$$X < Q_1 - 1.5(IQR) \quad \text{o} \quad X > Q_3 + 1.5(IQR)$$

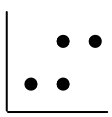
lo llamaremos ***valor atípico potencial*** ("potential outlier")

BOXPLOTS Y LOS VALORES ATÍPICOS

Actualmente se construyen dos tipos de "boxplots". Uno es simplemente llamado "boxplot" y el otro "boxplot modificado". La principal diferencia entre estos dos tipos de gráficas es que en la segunda los valores atípicos potenciales son graficados individualmente. Considere el conjunto de datos siguiente:

25, 41, 27, 32, 43, 66, 35, 31, 15, 5, 34, 26, 32, 38, 16, 30, 38, 30, 20, 21

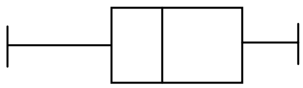


ACCIÓN	TECLADO
1. Coloca los datos en la lista L_1	
a. Coloca Valores en L_1	STAT 1
b. Si tienes que borrar valores previos en L_1	cursor L_1 CLEAR ENTER
c. Entrada de datos en L_1	16.06 ENTER
	16.02 ENTER
	⋮ ⋮
	16.28 ENTER
2. Construcción del histograma	2ND Y = <STATPLOT> 1
a. Selecciona **ON**	ENTER
	▼ > ENTER
Xlist: L_1	▼ 2ND 1 <L_1>
Freq: 1	
b. Ver histograma	ZOOM 9
3. Cómputo de medidas descriptivas	STAT > <CALC> ENTER
	2ND 1 aparece
	<1-VAR STATS L_1> ENTER

BOXPLOT

Seleccionar PLOT 2   [>] [ENTER]

ON   ENTER

Type:  [>] [>] [>] [>] [>]

[ZOOM] [9]

ACTIVIDAD LA DISTRIBUCIÓN DE LOS DATOS Y LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Considera los conjuntos de datos siguientes:

A: 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12

B: 7, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 13

C: 3, 4, 11, 12, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 16

D: 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 15, 16

Para cada conjunto de datos:

1. Construye un diagrama de puntos.
2. Determina la media, la moda y la mediana.

ACTIVIDAD CONSTRUYENDO GRÁFICAS

1. En una encuesta se le preguntó a 40 personas cuál era su refresco favorito.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	

1 = PEPSI **2 = COCA COLA** **3 = OTRO**

a. Construye una gráfica de barras.
b. ¿Por qué una gráfica de barras?
c. ¿Cuál es la moda y por qué?

2. Los datos siguientes representan el número de hijos por familia en una muestra de 64 familias de la comunidad Ponderosa.

NÚMERO DE HIJOS	NÚMERO DE FAMILIAS
0	8
1	11
2	18
3	11
4	6
5	4
6	2
7	1
8	2
9	1

a. Construye un histograma.
b. ¿Por qué un histograma?
c. ¿Cuántas familias tienen por lo menos dos hijos?

3. Construye un diagrama de tallo y hojas para las puntuaciones siguientes.

70	64	99	55	64	89	87	65
62	38	67	70	60	69	78	39
75	56	71	51	99	68	95	86
57	53	47	50	55	81	80	98
51	36	63	66	85	79	83	70

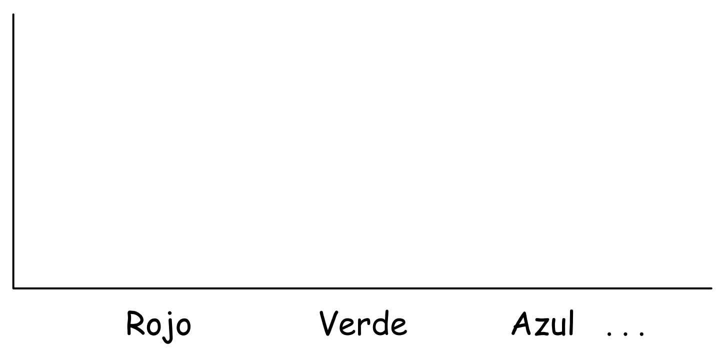
Interpreta el diagrama.

ACTIVIDAD SELECCIONA EL COLOR

Al organizar los datos es importante entender la conexión entre los datos y su representación gráfica. En esta actividad construiremos dos gráficas reales usando el concepto de color favorito.

PROCEDIMIENTO

A. Vierte los Fruit Loops en una cesta. Cada estudiante selecciona un Fruit Loop que representa su color favorito. En la cartulina, construye dos rectas perpendiculares como muestra la figura.



1. En la recta horizontal coloca los nombres de los colores.
2. Cada estudiante pondrá el Fruit Loop en la columna que indica el color seleccionado.
3. ¿Cuál fue el color más seleccionado?
4. ¿Cuál fue el color menos preferido?
5. ¿Qué representa el eje vertical?

B. Supongamos que hay **N** estudiantes y que cada uno tiene un Fruit Loop que representa su color favorito. Mide el diámetro de un Fruit Loop. Supongamos que mide **k** centímetros.

1. Queremos construir un círculo cuya circunferencia mida **Nk**. ¿Cuál debe ser el radio del círculo?
2. Reemplaza **N** por el número de estudiantes y **k** por los centímetros que mide el Fruit Loop para hallar el radio del círculo.
3. En la cartulina, dibuja un círculo con el radio que obtuviste en el paso 2.
4. Coloca los Fruit Loops sobre el círculo agrupándolos por colores.
5. ¿Cómo podemos hallar el ángulo cuyo arco subtendido está formado por el color azul?
6. Halla los otros ángulos.
7. ¿Qué relación observas entre esta gráfica y la anterior?

ACTIVIDAD LOS SALARIOS

Objetivos: **Interpretar las medidas de tendencia central en el contexto de una aplicación.**
Interpretar los cuartil.

RESPUESTAS

1. \$475
2. \$450
3. 50%
4. 75%
5. \$48,000

ACTIVIDAD BUSCANDO LA MEDIA

Objetivo: **Interpretar la media desde un punto de vista geométrico.**
Materiales: **Cuadrados de diversos colores, calculadora, papel**

RESPUESTAS

1. a) Sumar los cuadrados y dividir por dos.
   b) $7\frac{1}{2}$
2. 27 ÷ 3 = 9
3. 28 ÷ 4 = 7
4. $\dfrac{total\ de\ cuadritos}{cantidad\ de\ columnas}$
5. $\bar{x}$

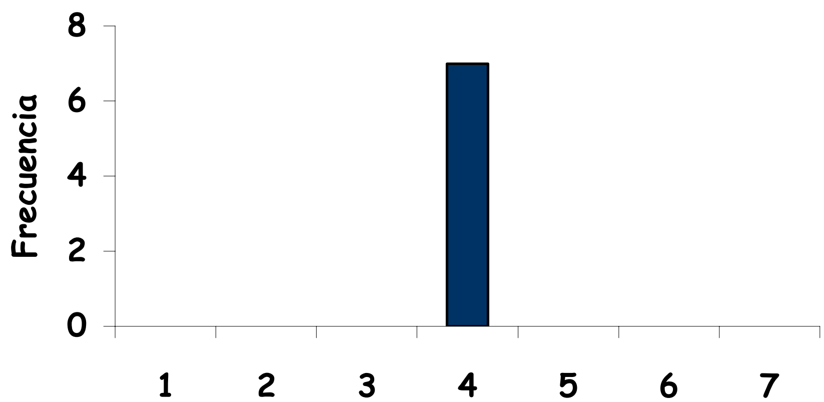
Objetivos: **Construir una gráfica de barra para diferentes conjuntos de datos.**
Determinar el alcance, la media y la desviación estándar de diferentes conjuntos de datos.

RESPUESTAS

I.

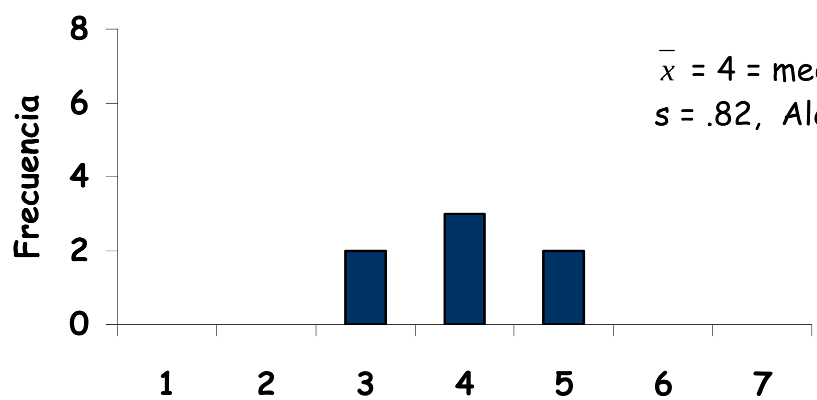
1.

$\bar{x}$ = 4 = med, moda = 4
$\bar{x}$ s = 0, Alcance = 0

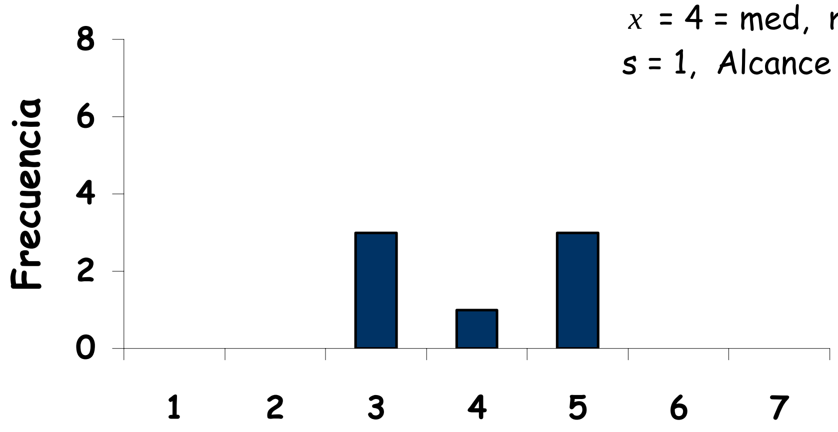


2.

$\bar{x}$ = 4 = med, moda = 4
s = .82, Alcance = 2

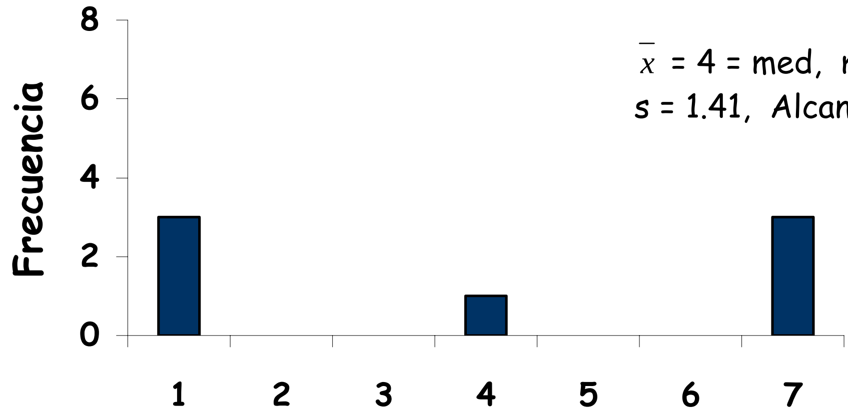


3.



$\bar{x}$ = 4 = med, moda = 3 y 5
s = 1, Alcance = 2

4.



$\bar{x}$ = 4 = med, moda = 1 y 7
s = 1.41, Alcance = 6

II. $s = \sqrt{\dfrac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}{n-1}}$

A) $\bar{x} = 18.27$, s = 5.73, Alcance = 19

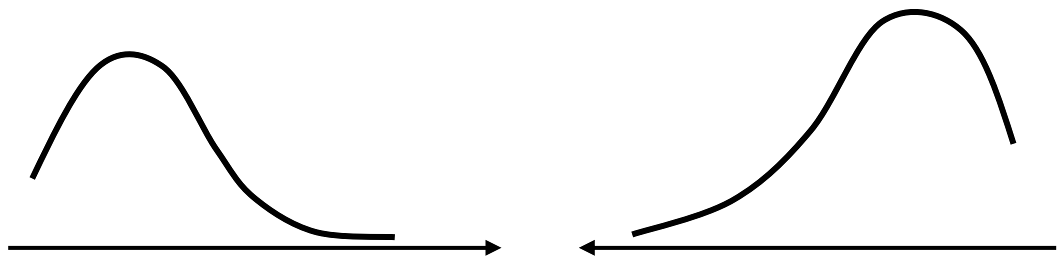
B) $\bar{x} = 10$, s = 6.5, Alcance = 16

ACTIVIDAD COMPARANDO PAÍSES

RESPUESTAS

a. Bonanzas

$$\frac{B}{M > \bar{x}} \qquad\qquad \frac{P}{\bar{x} > M}$$



$\bar{x} > M$ $\qquad\qquad$ $\bar{x} < M$

b. En Ponderosa

$$\frac{\Sigma X_B}{N} = 3750 \qquad\qquad \frac{\Sigma X_P}{N} = 4750$$

$$\Sigma X_B = 3750N \qquad\qquad \Sigma X_P = 4750N$$

ACTIVIDAD USANDO EL PROMEDIO

RESPUESTAS

2.

a. $\frac{A+B}{2} = 0$ $\qquad$ A - B = 3B

A = 4B

$$\frac{5B}{2} = 10$$

5B = 20

B = 4

$\therefore$ A = 16

b.

$$A + B = 16$$

$$A = 1\frac{2}{3}B$$

$$B + 1\frac{2}{3}B = 16$$

$$2\frac{2}{3}B = 16$$

$$\frac{8}{3}B = 16$$

$$\therefore B = 6,\ A = 16$$

3.

$A \quad B \quad C$

$$\frac{A+B}{2} = 7 \qquad \frac{B+C}{2} = 5 \qquad \frac{A+C}{2} = 8$$

$$A + B = 14 \qquad B + C = 10 \qquad A + C = 16$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\therefore\ A = 10,\ B = 4,\ C = 6$$

ACTIVIDAD AUMENTO DE SALARIO

RESPUESTAS

1.
   a. media = $21,613.63
   b. mediana = $21,250
   c. moda = $18,000
   d. mediana

2. $$21{,}613.63 + \frac{8x + 3x + 5x + 4x + 2x}{22} = 23{,}000$$

$$21{,}613.63 + x = 23{,}000$$

$$x = 1{,}386.37$$

ACTIVIDAD LOS SALARIOS

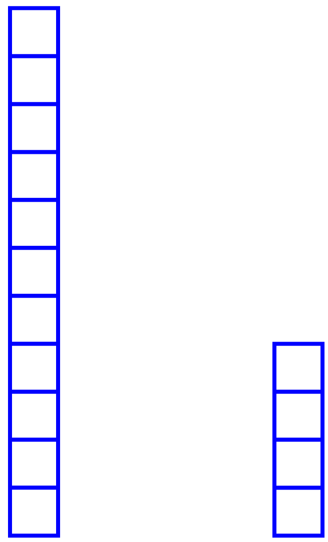
A continuación, se presentan las estadísticas correspondientes a los salarios mensuales en una casa publicadora:

Media	\$480	primer cuartilo	\$450
Mediana	\$450	tercer cuartilo	\$485
Moda	\$475		

1. ¿Cuál es el salario común? Explica.
2. El 50% de los empleados gana más de _________.
3. Aproximadamente, ¿qué por ciento de los empleados sobrepasó \$450?
4. Aproximadamente, ¿qué por ciento de los salarios estuvo por debajo de \$500?
5. Si la compañía tiene 100 empleados, ¿cuál es el salario mensual total de todos los empleados?

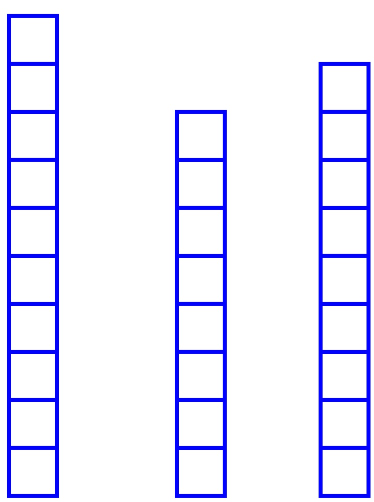
ACTIVIDAD BUSCANDO LA MEDIA

A continuación aparecen dos columnas construidas con cuadrados de 1 cm.

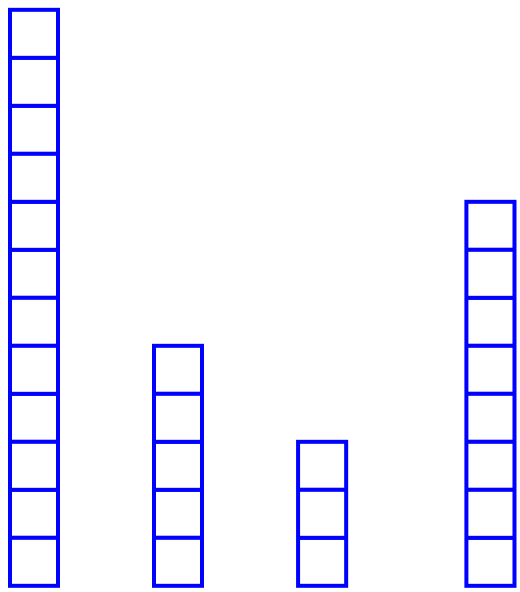


1. a. Describe un método para que las dos columnas tengan la misma altura.
   b. ¿Cuántos cuadrados aparecen en ambas columnas?

2. Repite el ejercicio anterior para esta situación:



3. Repite el ejercicio anterior para esta situación.



4. Usando las alturas originales y las operaciones aritméticas, halla una expresión matemática para describir el método de lograr alturas iguales en las columnas para cada una de las situaciones anteriores.

5. ¿Qué concepto estadístico se mostró en las situaciones anteriores? Explica.

ACTIVIDAD *EXPLORANDO LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR*

A. Considera los conjuntos de datos siguientes

Conjunto 1:	4	4	4	4	4	4	4
Conjunto 2:	3	3	4	4	4	5	5
Conjunto 3:	3	3	3	4	5	5	5
Conjunto 4:	1	1	1	4	7	7	7

Para cada conjunto:

1. Construye un histograma
2. Calcula $\bar{x}$ y S

B. Determina el alcance y la desviación estándar para cada conjunto de datos

Conjunto A:	1	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Conjunto B:	2	3	4	5	6	14	15	16	17	18	

1. ¿Cuál conjunto tiene menor variación, según:
   - el alcance?
   - la desviación estándar?

2. ¿Cuál de las dos medidas de variación, anteriores, es mejor en esta situación?

ACTIVIDAD ADICIONAL

1. Construye un conjunto A de datos.

2. Construye un conjunto B de datos sumándole a cada dato del conjunto A un mismo número. Calcula las medidas descriptivas para este conjunto B. ¿Puedes explicar el por qué de tus hallazgos? ¿Cómo comparan con las de A?

3. Construye un conjunto C de datos multiplicando cada dato de A por un mismo número. Calcula las medidas descriptivas para este conjunto C. Compara con A.

4. Construye un conjunto D de datos aumentando cada dato de A en un 10%. Compara con A.

ACTIVIDAD COMPARANDO PAÍSES

A continuación, se muestra la distribución del ingreso anual por individuo (en dólares) en los países de Bonanza y Ponderosa.

	Bonanza	**Ponderosa**
Mediana (M)	4,000	1,250
Media ($\bar{x}$)	3,750	4,750

1. ¿Cuál de los países, en tu opinión, tiene un mayor estándar de vida? Explica.
2. Si se impone una contribución sobre ingresos de un 10% en cada país, y suponiendo que el tamaño de ambos países es el mismo, ¿en cuál país se recolectará más?

ACTIVIDAD USANDO EL PROMEDIO

1. Usa los cuadrados provistos por tu maestro para contestar las preguntas siguientes:

   a. El promedio de las alturas de dos columnas es 10 y la diferencia de sus alturas es tres veces la altura de la columna menor. ¿Cuál es la altura de cada columna?
   b. El total de cuadrados usados en dos columnas es 16 y una de las columnas es $1\frac{2}{3}$ la altura de la otra columna. ¿Cuál es la altura de cada columna?

2. ¿Cómo podemos resolver los ejercicios anteriores usando álgebra?

3. Usa los manipulativos provistos por tu maestro para hallar la altura de tres columnas si sabemos que el promedio de la altura entre:

   - ✓ la primera y la segunda columna es 7.
   - ✓ la segunda y la tercera columna es 5.
   - ✓ la primera y la tercera columna es 8.

4. ¿Cómo podemos usar el álgebra para resolver la situación anterior?

ACTIVIDAD AUMENTO DE SALARIO

La compañía X de Servicios y Ventas de Equipo Electrónico consta de 22 empleados. Los salarios se desglosan a continuación:

Salario	Número de empleados
$18,000	8
$19,500	3
$23,000	5
$25,000	4
$29,000	2

1. Calcule la media, la mediana y la moda de la distribución. ¿Cuál es la mejor medida para describir los salarios de esta compañía?

2. La gerencia decide aumentar los salarios de $18,000 a $18,500 ya que son personas sin experiencia. El resto de los salarios se aumentará por la misma cantidad. Esta cantidad debe lograr que el salario promedio de la compañía sea $23,000. ¿Cuánto le tienes que aumentar a cada persona?

Relaciones entre variables

ACTIVIDAD MODELANDO CON GRÁFICAS

Objetivo:	**Modelar relaciones entre variables continuas con gráficas.**
Materiales:	**Papel en blanco, una bola que rebote, papel con ejes del plano cartesiano (no rotulado)**

RESPUESTAS

El modelaje matemático es uno de los medios más efectivos en la solución de problemas, ya que permite representar simbólicamente una situación y analizarla. En el nivel intermedio los estudiantes resolvieron problemas mediante la construcción de modelos algebraicos y geométricos. En el nivel superior ampliarán sus conocimientos desarrollando modelos matemáticos más complejos que utilizan ecuaciones e inecuaciones no lineales, gráficas de relaciones entre variables continuas, grafos, matrices, etc.

Esta actividad sirve de transición del nivel intermedio al superior en el tema de construcción de gráficas. Anteriormente se consideraron gráficas de relaciones entre variables discretas, como las circulares, de barra y poligonales. Ahora se considerarán gráficas de relaciones entre variables continuas. La primera parte de la actividad, lleva al estudiante a determinar y analizar la forma que tendrán estas gráficas. Esto lo harán llevando a cabo un experimento donde dejan caer una bola y observarán como rebota según transcurre el tiempo. En la segunda parte, se usará la información recopilada en la primera para construir con precisión una de ellas.

PROCEDIMIENTO

1. Organice la clase en parejas y distribuya papel en blanco y otro con los ejes no rotulados de un plano cartesiano.

2. De ser necesario, para introducir la actividad puede repasar la construcción de una gráfica de tipo circular, de barra o poligonal, en una situación donde las variables sean discretas. Durante la discusión enfatice la diferencia entre variable discreta y variable continua. Es importante que se observe que al seleccionar una de estas gráficas para modelar la situación, queda determinada la forma que tendrá la gráfica. Para construirla con precisión, falta solamente una tabla de valores de las variables.

3. La bola que aparece en los materiales se utilizará para describir una situación donde las variables son de naturaleza continua. Desde una altura de aproximadamente 6 pies o más, deje caer la bola verticalmente varias veces para que los estudiantes la observen mientras rebota. Luego, solicite que dibujen, en el papel con el plano cartesiano, la forma de la gráfica del rebote de la bola y que rotulen los ejes con las variables apropiadas. Después de un tiempo razonable permita a varios grupos que presenten sus trabajos en la pizarra. Asegúrese que durante las presentaciones, quede establecido que en el eje vertical se representa la altura y en el eje horizontal el tiempo. De algún grupo presentar la forma de la gráfica usando una escala en los ejes, explique que la misma no procede ya que no se han tomado medidas.

   Luego que la clase termine la presentación de sus dibujos, proyecte una transparencia con la forma correcta.

   Las características del dibujo sugieren las siguientes preguntas:

   - ¿Qué representa en el dibujo los puntos **P**, **A**, **Q**?

     P representa la altura desde la cual se dejó caer la bola. **A** representa el instante en que la bola rebota por primera vez o el tiempo que le toma a la bola llegar al piso luego que la dejan caer. **Q** representa la altura que alcanza la bola luego del primer rebote.

- ¿Qué representan los segmentos **OA**, **AB**?

  $\overline{OA}$ representa el intervalo de tiempo transcurrido desde que la bola se dejó caer hasta que rebota por primera vez. $\overline{AB}$ representa el intervalo de tiempo transcurrido entre el primer y segundo rebote.

- ¿Cómo comparan las medidas de los segmentos **AB** y **BC**? Explica.

  El segmento **AB** es más largo que el segmento **BC**, ya que la bola rebota a una altura mayor en el $\overline{AB}$ que en el $\overline{BC}$, y por tanto, le toma más tiempo regresar al piso.

- ¿Qué forma asumirá la curva dibujada según transcurre el tiempo a lo largo del eje horizontal?

  La forma de una recta coincidiendo con el eje horizontal, luego que la bola deje de rebotar.

- Si se cambia la bola o el piso, ¿en qué se diferencian y en qué se parecen las curvas correspondientes que se dibujen al compararlas con la curva de la transparencia?

  Diferirán en el tamaño, la altura y cuán cerca o separados en el eje horizontal estén los puntos donde la curva lo toca. Se parecerán en que la forma de las curvas será la misma.

- ¿Qué información adicional se necesita para que el dibujo de la curva corresponda exactamente a la gráfica de la relación entre la altura ***s*** de la bola y el tiempo transcurrido ***t***?

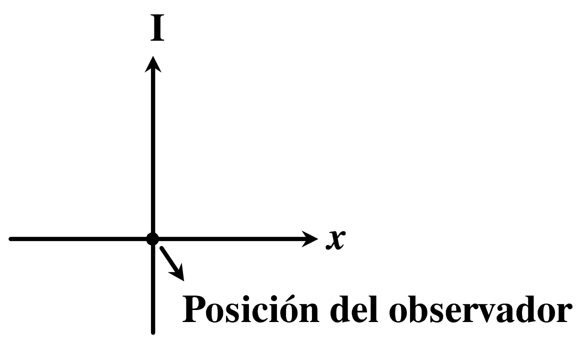
  Una tabla de valores para las variables ***t*** y ***s***, recopiladas experimentalmente.

Nota: Es importante que los estudiantes comprendan que el modelo construido no representa la gráfica de la relación entre la altura de la bola y el tiempo transcurrido. Solamente representa la forma que tendrá la gráfica cuando se construya con precisión. Debe enfatizarse que no es posible representar en una tabla de valores todos los valores que asumirán las variables continuas. El conocer la forma de la gráfica es lo que permite trazar la misma luego de conocer algunos puntos de ésta.

4. Presente ahora la situación siguiente, la cual modelarán en un papel en blanco. Ellos construirán los ejes y los rotularán.

   Te encuentras al lado de una carretera. Se acerca y pasa una ambulancia con la sirena sonando. Modela la forma de la gráfica de la relación entre la intensidad **I** del ruido que escuchas y la distancia ***x*** entre la ambulancia y tú.

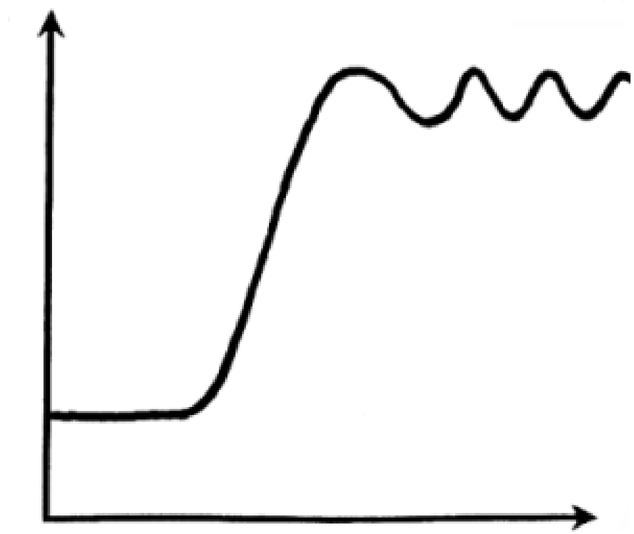
Nota: Durante la presentación y discusión del trabajo de los diferentes grupos, se debe prestar atención a cómo dibujan los ejes, los rotulan y la forma sugerida. A continuación, se presenta un posible modelo de la forma sugerida.



5. Ahora, puede solicitar que cada pareja discuta y describa una situación donde se relacionen dos variables continuas. Luego, se intercambian entre sí sus descripciones para construir el modelo correspondiente.

   Otra actividad similar puede ser que cada pareja discuta y construya una gráfica donde se relaciones dos variables continuas. Otra pareja describirá una situación que corresponda a ese modelo.

Ejemplo:



Posibles situaciones que corresponden al modelo:

El horno está a nivel ambiental (eje vertical). Se prende y se desea que la temperatura aumente a 350°F. Luego de llegar a esta temperatura, el horno, prende y apaga.

1. Temperatura de un horno convencional (eje vertical) versus el tiempo transcurrido (eje horizontal) desde que se prendió según medida por su termostato.

2. Consumo de energía eléctrica en un hogar (eje vertical) versus las horas en que ocurre (eje horizontal).

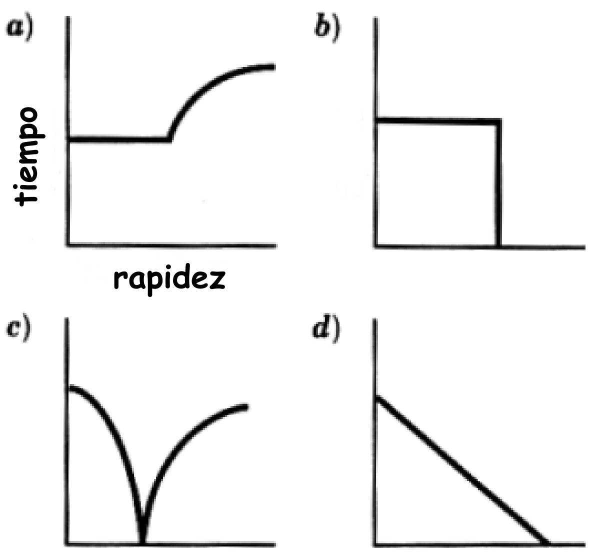
Se debe enfatizar, que para construir la gráfica de una relación entre variables continuas, es importante conocer la forma que tendrá la gráfica antes de construirla.

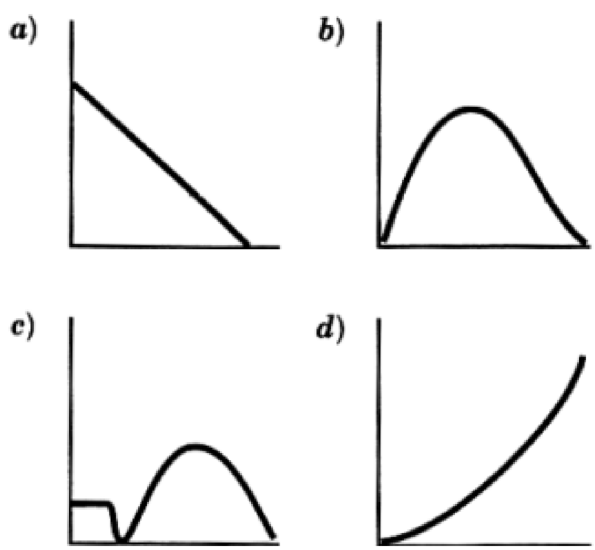
Ejemplos:

A continuación aparecen dos ejemplos que podrían discutirse en clase antes de asignar ejercicios. Se incluye una breve descripción de la respuesta correcta.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
Un auto está en movimiento constante, choca contra una pared y se detiene.	Caminábamos y decidimos subir una colina donde había nieve, para luego deslizarnos en un trineo.

Escoge la gráfica que mejor concuerde con la descripción del ejemplo:





Explicación del Ejemplo 1:

La contestación correcta es la **b** (velocidad constante al inicio y pérdida de velocidad abrupta al detenerse). Es recomendable que los estudiantes discutan el por qué no están correctas las alternativas **a**, **c** y **d**. La alternativa **a**, aunque comienza a una velocidad constante, al chocar, aumenta la velocidad y ésto contradice los hechos. La alternativa **c** representa un auto que está disminuyendo la velocidad hasta detenerse y luego, acelera para recobrar la velocidad anterior; mientras la **d** lo muestra aminorando la velocidad hasta cero.

Explicación del Ejemplo 2:

La contestación correcta es la **c** (velocidad constante que aminora según suben a la colina y se detienen en el tope; al deslizarse aumenta la velocidad a un máximo luego de la cual disminuye la velocidad hasta detenerse). La alternativa **a** indica que la velocidad disminuía en vez de aumentar cuando se inició el descenso en el trineo. Muchos estudiantes contestan la alternativa **b** pensando en la forma de la colina; no se dan cuenta que ésto significa que al escalar la colina aumentan la velocidad y al bajar la colina en trineo la disminuyen. La alternativa **d** presenta una situación en que los participantes continúan aumentando su velocidad y no se detienen.

ACTIVIDAD "CORN FLAKES"... Y ALGO MÁS

Objetivo:	**Investigar relaciones entre variables.**
Materiales:	**20 cajas de cereales para cada subgrupo, calculadora gráfica TI 83 plus**

Separe al grupo en subgrupos de 4 a 5 estudiantes. Seleccione un líder en cada subgrupo quien tendrá a su cargo explicar las conclusiones a las que llega el grupo.

RESPUESTAS

Éstas dependerán de los datos recogidos (las cajas de cereales tienen información variada).

ACTIVIDAD LOS HUESOS

Objetivo: **Investigar si existe una relación entre la altura de una persona y la longitud de un hueso del cuerpo.**

Materiales: **Cinta métrica, calculadora gráfica TI 83 plus**

PROCEDIMIENTO

Separe el grupo en subgrupos de 4 ó 5 personas.

RESPUESTAS

Éstas dependerán de los datos recogidos.

ACTIVIDAD MANÍ, MANICERO

Objetivo: **Investigar la relación entre longitud y masa.**

Materiales: **Balanzas, maníes, reglas, calculadora gráfica TI-83 plus**

RESPUESTAS

Éstas dependerán de los datos recogidos (peso y tamaño de los maníes).

ACTIVIDAD ¿NOS BRONCEAMOS?

RESPUESTAS

1. Hacer Diagrama de dispersión en la calculadora TI-83.
2. Tendencia lineal.
3. Sí. En forma aproximada.
4. A medida que la latitud aumenta, la tasa de cáncer disminuye.
5. Podrían ser varios, entre ellos, factores genéticos.

ACTIVIDAD "CORN FLAKES"... Y ALGO MÁS

PROCEDIMIENTO

1. El gobierno federal requiere que en todo alimento envasado aparezca cierta información referente al valor nutritivo del producto. Estudia cuidadosamente las cajas que tienes en tu mesa y determina un plan para investigar si hay alguna relación entre:
    - El azúcar y los carbohidratos
    - El azúcar y la fibra
    - La fibra y las calorías
2. ¿Puedes hacer alguna inferencia en cuanto a la relación que existe entre esos pares de variables?

REVISA tu plan y espera a la discusión en grupo antes de pasar a la próxima página.

1. Traza un diagrama de dispersión en tu calculadora. Usa L_1 para colocar los gramos de azúcar y L_2 para los gramos de carbohidratos.
2. Observa los puntos en la gráfica. ¿Qué curva te sugiere la distribución de los puntos? Explica.
3. Usa tu calculadora para hallar la curva de mejor ajuste para ese par de variables. La **r** que aparece en la pantalla es el coeficiente de correlación. Apunta este número.
4. Repite el mismo procedimiento con el azúcar y la fibra, y con los carbohidratos y las calorías.
5. Compara los resultados con tu estimado.
6. ¿Qué puedes concluir en cuanto al valor de **r**?
7. ¿Cuál de los pares de variables está más relacionado? Explica.

Determina la localización de los huesos siguientes:

Húmero
Radio
Fémur
Tibia

La misma persona debe medir a todos los del subgrupo.

Completa la tabla siguiente:

	LONGITUD DEL			
ALTURA	**húmero**	**radio**	**fémur**	**tibia**

Espera a que todos los subgrupos llenen las tablas para obtener una tabla que contenga la información de todo el grupo. Se necesita la tabla de todo el grupo para contestar las preguntas a continuación.

1. Determina si existe algún patrón en los datos que aparecen en la tabla.
2. Determina cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente. Explica.
3. Usa la calculadora para trazar un diagrama de dispersión.
4. Halla la curva de mejor ajuste para sus datos.
5. Selecciona las longitudes de dos huesos y usa su ecuación para comparar la altura estimada con la altura real de la persona.

ACTIVIDAD MANÍ, MANICERO

PROCEDIMIENTO

A cada grupo se le distribuirá 25 maníes. Mide cada maní en milímetros a lo largo de la ruta más larga y sobre la superficie. Pesa en gramos los 25 maníes.

1. En una tabla coloca la información sobre los pesos y medidas.
2. Indica cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente. Explica.
3. Traza un diagrama de dispersión usando la calculadora.
4. Halla la curva de mejor ajuste.
5. ¿Qué significado tiene el intercepto en el eje de y?
6. Selecciona un maní al azar. Mide su largo y haz una predicción en cuanto a su masa usando la curva de mejor ajuste. ¿Cuán buena fue la aproximación?

ACTIVIDAD ¿NOS BRONCEAMOS?

En muchas ocasiones estudiamos dos variables en una muestra de datos. Éstas pueden ser: peso y estatura, puntuaciones en dos exámenes, ingreso y gastos. Es posible que entre estas dos variables haya alguna relación o puede que no haya relación alguna. La manera más fácil de hallar la relación, si existe, es construir un diagrama de dispersión. Es decir, en el eje horizontal colocamos una de las variables y en el eje vertical la otra variable. Localizamos los pares ordenados, pero no unimos los puntos. Por último, observamos si hay alguna tendencia.

INSTRUCCIONES

Uno de los factores que contribuye a la incidencia de cáncer de la piel es la radiación ultravioleta (UV) que viene del sol. Sabemos que la cantidad de radiación UV que recibe una persona es una función del grueso de la capa protectora de ozono, que a su vez depende de la latitud en que vive la persona. La tabla que se muestra a continuación indica la tasa de cáncer de la piel para varones blancos en nueve regiones de los EU entre los años 1969 y 1971, y la latitud norte a la que se encuentran las áreas.

Grados de latitud norte	Tasa de cáncer por 100,000 habitantes
32.8	9.0
33.9	5.9
34.1	6.6
37.9	5.8
40.0	5.5
40.8	3.0
41.7	3.4
42.2	3.1
45.0	3.8

1. Construye un diagrama de dispersión para estos datos.
2. Discute si observas alguna tendencia. Explica.
3. ¿Se puede trazar una línea recta razonablemente cercana a los puntos en la gráfica? ¿Explica esta línea la relación entre los puntos?
4. Discute si hay alguna relación entre la latitud donde vive la persona y la incidencia de cáncer de la piel.
5. ¿Qué otros factores contribuyen a la incidencia de cáncer de la piel?

Probabilidad

Casi todo suceso que enfrentamos a diario contiene cierto grado de incertidumbre que intentamos cuantificar al menos de forma intuitiva. Todos los días en los periódicos o en la televisión se habla de la probabilidad de aguaceros para el día o la semana. Por otro lado, las compañías de seguro venden pólizas y cobran primas basadas en la probabilidad de que el asegurado no sufra accidente o muera en cierto periodo de tiempo.

Desde un punto de vista científico, la probabilidad tiene un lugar único en la ciencia en cuanto a que representa una noción con más interpretaciones que cualquier otro concepto en la historia de la ciencia.

¿Qué es probabilidad?

El tema de la probabilidad teórica y experimental o empírica se estudia en la escuela desde el nivel elemental. Una actividad típica que se presenta es la siguiente:

> Se tira una bola pintada de tres colores: roja, azul y blanca, y se registra el color en que cae. Se repite varias veces, digamos 50 veces, y la bola cayó en el color rojo 12 veces. Entonces se dice que la probabilidad experimental de que la bola caiga en rojo es $\frac{12}{50}$, esto es P(rojo) = $\frac{12}{50}$.

¿Te has preguntado alguna vez por qué los juegos de azar, cuyos resultados son impredecibles, resultan un buen negocio para los casinos? Todo negocio viable requiere ganancias predecibles por el servicio que ofrece y los casinos no son excepción.

Se observa un hecho bien sorprendente en cualquier juego de azar. Nadie puede predecir con certeza qué resultado se va a obtener al jugarlos una o varias veces. Sin embargo, se puede pronosticar con bastante seguridad lo que va a ocurrir, luego que se repita el juego una gran cantidad de veces. La frecuencia relativa acumulada con que ocurre cada resultado tiende a estabilizarse alrededor de un número específico, único. Sobre este principio, comprobado por la experiencia, es que descansa la industria del juego de azar. Conocido ese número específico que se asocia con cada posible resultado de juego, se fijan los premios a pagarse, de forma tal, que cada dólar jugado produzca una ganancia fija. Este principio es válido no solamente para los juegos de azar sino para cualquier fenómeno o situación aleatoria. Se dice que un fenómeno o situación es aleatorio (ocurre al azar) cuando cada resultado individual es incierto, pero luego de repetirse muchas veces su patrón de ocurrencia es predecible. "Al azar" no significa "a lo loco". En situaciones aleatorias hay orden, lo único es que emerge a largo plazo.

En el ejemplo citado anteriormente, $\frac{12}{50}$ = 0.24 no es la probabilidad de que al tirar la bola caiga en rojo. Si repite las tiradas lo más probable es que obtenga otro resultado, digamos $\frac{15}{50}$ = 0.30. La frecuencia relativa acumulada es $\frac{27}{100}$ = 0.27. Lo que indica la experiencia (el principio citado) es que si continúa tirando la bola y acumulando los resultados, la frecuencia relativa acumulada tiende a estabilizarse alrededor de un número único, específico. Ese número específico es lo que en realidad se conoce como "la probabilidad de que la bola caiga en rojo al tirarla", o sea, P(rojo). Es una propiedad o atributo inherente al fenómeno aleatorio. No depende de la forma como interpretemos o analicemos la situación.

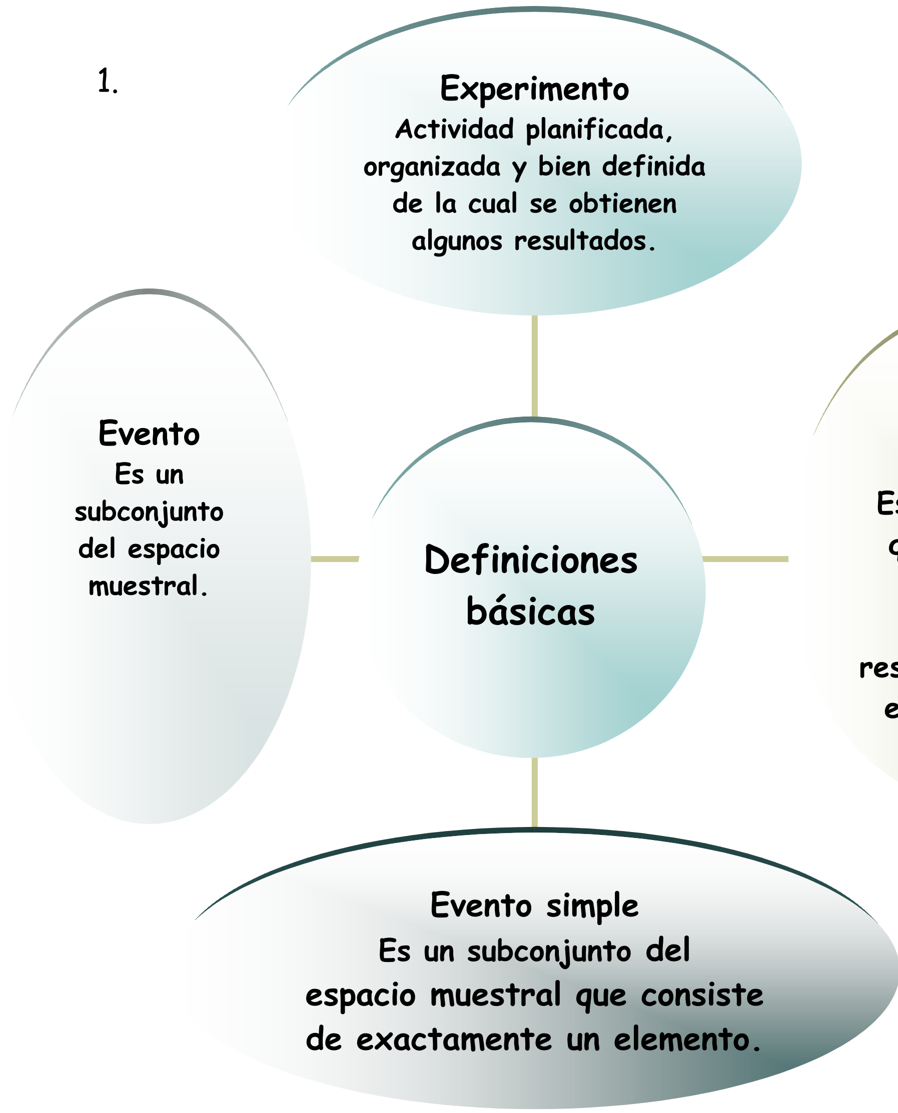
Un fenómeno aleatorio o situación al azar puede resultar de varias formas. Se observa que la frecuencia relativa con que ocurre cada posible resultado tiende a estabilizarse alrededor de un número específico, según aumenta la cantidad de repeticiones del fenómeno o situación. A ese número es que llamamos "la probabilidad de ocurrencia del resultado". También usamos el término probabilidad para referirnos al área de Matemáticas donde se estudia todo lo relacionado con situaciones de incertidumbre. Al principio citado, se le conoce en probabilidad como la ***"Ley de los números grandes":*** sea A un evento de un espacio muestral, entonces $P(A) = \lim_{n \to \infty} P_{emp}(A)$, donde **n** es la cantidad de veces que se lleva a cabo el experimento.

Existen tres clases de probabilidades. La ***probabilidad teórica*** que es aquella que hemos estado trabajando, la ***probabilidad empírica*** la que se obtiene por experimentación y la ***probabilidad subjetiva*** que es aquella que ofrece una persona basándose en experiencias personales. En nuestra vida diaria vemos la probabilidad como una medida del grado de certeza que tenemos de que una situación va a resultar en una forma determinada. Para comunicar ese grado de certeza usamos palabras y frases como nunca, jamás, puede ser, posiblemente, quizás, tal vez, seguro que sí y otras. Esta manera de comunicar la probabilidad de que algo ocurra no es aceptable ni en las matemáticas, la ciencia o la industria.

¿Cómo se asigna la probabilidad?

Cada disciplina matemática tiene sus propios símbolos y lenguaje. Necesitamos conocerlos para poder comunicarnos efectivamente.

1.


Experimento
Actividad planificada, organizada y bien definida de la cual se obtienen algunos resultados.
Evento
Es un subconjunto del espacio muestral.
Definiciones básicas
Espacio muestral
Es el conjunto que contiene todos los posibles resultados de un experimento.
Evento simple
Es un subconjunto del espacio muestral que consiste de exactamente un elemento.

2. Ejemplos

Experimento: Se selecciona, aleatoriamente, una carta de un paquete de barajas de 52 cartas.

Espacio muestral: Es el conjunto que consiste de todas y cada una de las 52 cartas.

Eventos simples:

Subconjunto que contiene el As de corazones.
Subconjunto que contiene el Diez de diamantes.

Eventos:

Subconjunto que contiene el As de corazones.
Subconjunto que contiene el Cuatro de diamantes, el Diez de trébol, la K de espada y la Q de diamantes.
Subconjunto que no contiene ningún elemento. Este es el conjunto vacío, { } = ϕ

3. Otras definiciones

a. Un experimento es ***uniforme*** si al seleccionar un elemento, al azar, de su espacio muestral todos los elementos tienen la misma oportunidad de ser seleccionados.

Ejemplos:

Se selecciona, aleatoriamente, una carta de un paquete de barajas de 52 cartas. Como hay una carta de cada clase, todas tienen la misma oportunidad de ser seleccionada.
Se lanza un dado regular de seis caras y se toma el número en la cara superior. Todos los números del 1 al 6 tienen la misma oportunidad ya que se repiten la misma cantidad de veces en el dado.

b. Sea **N** la cantidad de elementos del espacio muestral de un ***experimento uniforme*** y **f** la cantidad de elementos de un evento ***A*** del espacio muestral. Definimos la probabilidad de ***A*** como $\frac{f}{N}$ y la denotamos por P(A). P(A) = $\frac{f}{N}$.

Ejemplo:

Se selecciona una carta, al azar, de un paquete de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta seleccionada sea un trébol? El espacio muestral de este experimento tiene 52 elementos, N = 52, y el evento deseado tiene 13 elementos porque hay trece cartas en total con trébol. Por, lo tanto, P(salga un trébol) = $\frac{13}{52}$ = $\frac{1}{4}$ = 0.25

c. Sean A y B dos eventos de un espacio muestral S. A partir de estos dos eventos puede formar otros tres eventos:

La ***unión*** de eventos: $A \cup B$ = que ocurra A ***o*** que ocurra B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

La ***intersección*** de eventos: $A \cap B$ = que ocurra A ***y*** que ocurra B

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B|A) = P(B) \bullet P(A|B)$$

El ***complemento*** de un evento: ~A = que no ocurra A

d. Dos eventos, A y B, son ***mutuamente exclusivos (excluyentes)*** si cuando el evento A ocurre entonces el evento B no ocurre, y viceversa.

e. Los eventos A y B son ***independientes*** si el que ocurra uno no afecta la probabilidad de que ocurra el otro.

f. La ***probabilidad condicional*** es la probabilidad de que ocurra un evento A sabiendo que ocurrió un evento B, P(A|B). Esta se halla: P(A|B) = $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

En las actividades presentadas los estudiantes: determinarán en forma empírica y en forma teórica la probabilidad de un suceso; calcularán el espacio muestral mediante técnicas de conteo; trabajarán con la frecuencia y frecuencia relativa, estudiarán la relación que existe entre los valores empíricos obtenidos para la probabilidad de un suceso y el valor teórico, y trazarán e interpretarán la gráfica de una función de probabilidad.

Contemos

Objetivos: **Calcular permutaciones.**
Conocer las leyes de conteo.
Hacer combinaciones.

INTRODUCCIÓN

El problema de contar que parece elemental puede resultar uno muy complejo. Contar es un proceso fundamental de la matemática que se considera, directa o indirectamente, en todos los currículos desde el nivel elemental hasta el graduado. A través de varios problemas se ilustrarán diferentes estrategias para contar.

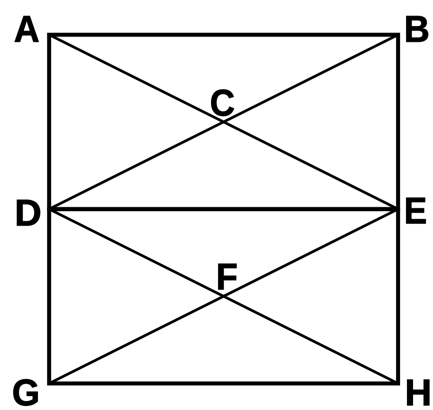
ESTRATEGIAS PARA CONTAR

ACTIVIDAD A

Comentario

Se introduce la estrategia de una ***lista ordenada*** o ***sistémica*** como generalización del proceso de contar aprendido en escuela elemental. Allí, aunque no se escriben listas, se ordenan mentalmente los objetos a contarse y luego se enumeran uno a uno. Para generar una lista ordenada se escoge alguna propiedad o característica común de los objetos para establecer el orden. En el problema identificamos los vértices con letras, y ordenamos como sigue.

RESPUESTAS



a. 18 triángulos:

ABC	BCE	DEH
ABD	BDE	DFG
ABE	BDH	DGH
ACD	CDE	EFH
ADE	DEF	EGH
AEG	DEG	FGH

b. 14 cuadriláteros:

ABED	BDFE
ABEG	BDGE
ABHD	BDGH
ABHG	CDFE
ADFE	CDGE
ADHE	CDHE
AEHG	DEHG

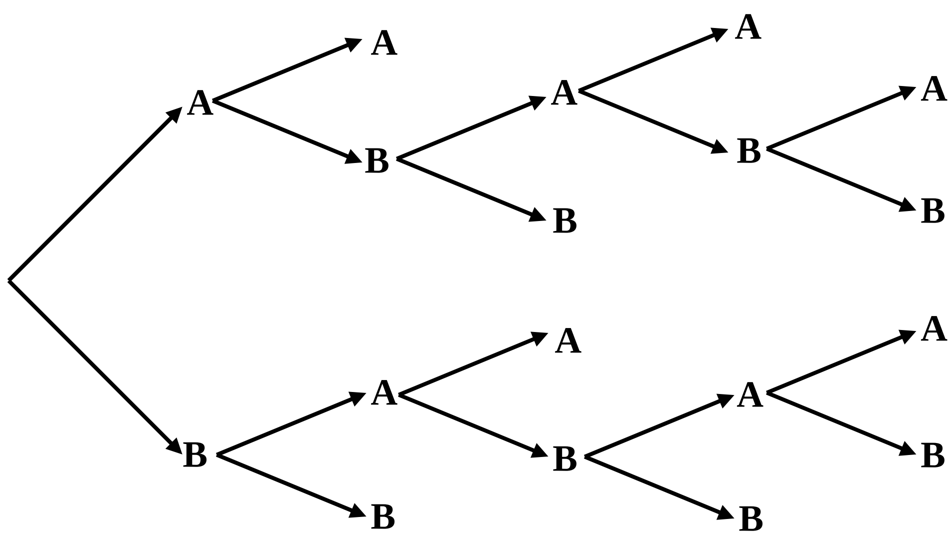
ACTIVIDAD B

Comentario

Se introduce la estrategia del ***"diagrama de árbol"*** o ***"árbol de posibilidades"*** como otra manera de generar una lista ordenada o sistemática. También, resultan útiles al analizar experimentos o procesos de múltiples etapas.

RESPUESTAS

Diagrama de árbol para la situación



a. distintas formas – 10

b. cantidad máxima de juegos – 5

AA	BAA
ABAA	BABAA
ABABA	BABAB
ABABB	BABB
ABB	BB

ACTIVIDAD C

Comentario

A) Se introduce la estrategia del ***Principio Fundamental de Conteo*** o ***Regla del Producto.***

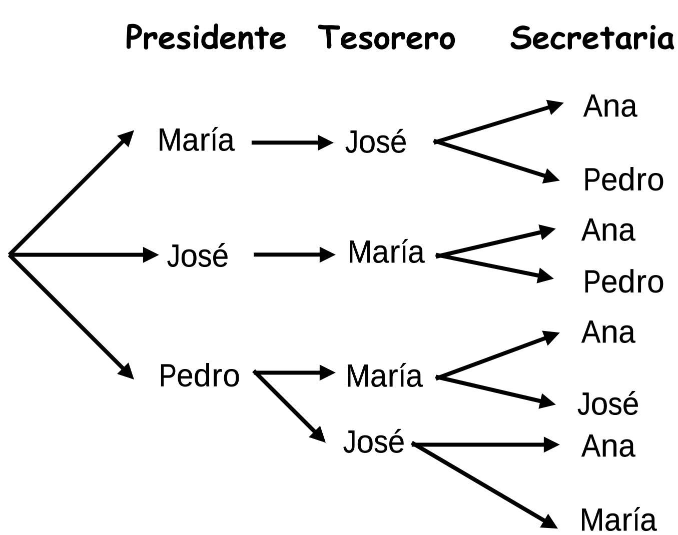
B) Aquí se puede comentar que hay que tener cuidado al aplicar esta estrategia. Considere el ejemplo siguiente.

En una corporación se escogerán tres oficiales (Presidente, Tesorero y Secretaria) entre cuatro personas: Ana, José, María y Pedro. Ana no puede ser presidente y el tesorero tiene que ser María o José. ¿De cuántas maneras distintas se pueden escoger a los oficiales?

Una aplicación del Principio Fundamental de Conteo es suponer que hay tres candidatos para presidente, dos para tesorero y quedan dos para secretaria.

$\therefore \quad \frac{3}{Pres} \quad \frac{2}{Tes} \quad \frac{2}{Sec} \qquad \therefore\ 3 * 2 * 2 = 12$ maneras distintas de escoger los oficiales. <u>**ERROR**</u>

Si se usa un diagrama de árbol se obtienen 8 formas diferentes.



$$\frac{26}{\text{1era letra}}\quad\frac{26}{\text{2da}}\quad\frac{26}{\text{3era}}\quad\frac{10}{\text{1er dígito}}\quad\frac{10}{\text{2ndo}}\quad\frac{10}{\text{3ero}}$$

26 * 26 * 26 * 10 * 10 * 10 = 17,576,000 tablillas

ACTIVIDAD D

Comentario

Se introduce el ***Principio de Inclusión-Exclusión***. Este principio aplicado a dos conjuntos dice que:

Sea $|A|$ = al número de elementos en un conjunto A,

entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Para tres conjuntos

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

En general

$$\Big|\bigcup_{1\le i\le n} A_i\Big| = \sum_{1\le i\le 10}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{1\le i<j<k<l\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \ldots + (-1)^n \Big|\bigcap_{1\le i\le n} A_i\Big|$$

RESPUESTAS

A = $\{$estudiantes que toman Química$\}$
B = $\{$estudiantes que toman Biología$\}$
A $\cup$ B = $\{$estudiantes que toman Química o Biología$\}$
A $\cap$ B = estudiantes que toman ambos cursos
$\overline{A \cup B}$ = $\{$estudiantes que no toman ninguno de los dos cursos$\}$

$$|\overline{A \cup B}| = 30 - |A \cup B|$$
$$= 30 - [|A| + |B| - |A \cap B|]$$
$$= 30 - [12 + 15 - 8] = 11$$

Observe que si $A \cap B = \phi$ el principio de inclusión-exclusión dice que

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

A este resultado particular se le conoce como ***La Regla de la Suma***.

En palabras:

Si un experimento tiene ***n*** resultados posibles y otro experimento independiente tiene ***m*** resultados posibles, entonces existen n + m resultados posibles cuando exactamente uno de los experimentos tiene lugar.

Ejemplo:

Si se programan 7 cursos por la mañana y 5 por la tarde hay 7(5) = 35 opciones para que un estudiante tome un curso por la mañana y otro por la tarde (por Regla del Producto o Principio Fundamental de Conteo). Habrán 7 + 5 = 12 opciones para quien tome un solo curso.

ACTIVIDAD E

Comentario

Resolver primero por ***Regla del Producto***. Luego, introducir el concepto de una selección de ***r*** objetos entre ***n*** objetos distintos. Explicar las diferentes formas de hacer una selección:

a) con repetición
b) sin repetición
c) donde el orden en que se escoge importa
d) donde el orden en que se escoge no importa

Definir permutaciones, combinaciones y los símbolos nP_r, nC_r o (n_r). Desarrollar las fórmulas:

$$P(n,r) = n(n-1) \ldots (n - r + 1)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

RESPUESTA: ***P(7, r)***

ACTIVIDAD F

RESPUESTA: *C*(42, 6) dólares

ACTIVIDAD G

Un problema complicado de conteo.
Otra pregunta que puede sustituir la anterior es: Halle el número de formas diferentes en que se pueden devolver los sombreros de manera que a nadie le toque su propio sombrero.

RESPUESTA

1) Hay 10! maneras diferentes de devolver los sombreros a los 10 hombres o permutaciones de los 10 sombreros.

2) Sea A_i = {permutaciones donde el hombre # *i* le correspondió su sombrero}

Observe que $|A_i|$ = 9! , $|A_i \cap A_j|$ = 8! , $|A_i \cap A_j \cap A_k|$ = 7! , ect.
$i \neq j$ $\quad$ $i < j < k$

$\bigcup A_i$ = {permutaciones donde por lo menos un hombre recibió su
$1 \leq i \leq 10$ sombrero}

* 10! - $|\bigcup Ai|$ = número de permutaciones donde ningún hombre recibió su
$1 \leq i \leq 10$ sombrero

Por Principio de Inclusión-Exclusión

$$\left|\bigcup_{1\leq i\leq 10} Ai\right| = \sum_{1\leq i\leq 10} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq 10} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq 10} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots - |A_1 \cap A_2 \ldots\ldots \cap A_{10}|$$

$$= \binom{10}{1} 9! - \binom{10}{2} 8! + \binom{10}{3} 7! - \binom{10}{4} 6! + \ldots - \binom{10}{10} 0!$$

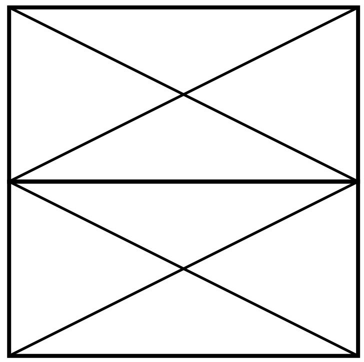
= 2,293,839

10! - $|\bigcup Ai|$ = 3,628,800 – 2,293,839 = 1,334,961

Probabilidad de que nadie obtenga su sombrero = .36788

ACTIVIDAD A (Contemos)

Considera la figura siguiente.



a. ¿Cuántos triángulos hay? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuántos cuadriláteros hay? Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD B (Contemos)

Dos equipos, A y B, juegan un torneo donde el ganador será el que primero gane dos juegos consecutivos o un total de tres juegos.

a. ¿De cuántas formas diferentes puede jugarse el torneo? Explica.

b. ¿Cuál es la cantidad máxima de juegos que se puede jugar? Explica.

ACTIVIDAD C (Contemos)

Las tablillas para los automóviles en Puerto Rico se identifican con tres letras del alfabeto inglés seguidas de tres dígitos del 0 al 9. ¿Cuántas tablillas diferentes se pueden identificar con este sistema? Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD D (Contemos)

En un grupo de 30 estudiantes de ciencias 12 toman el curso de Química, 15 de Biología y 8 toman ambos cursos. ¿Cuántos estudiantes no toman Química ni Biología? Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD E (Contemos)

¿Cuántos números de tres cifras, sin repetición de cifras, se pueden formar con los dígitos 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9? Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD F (Contemos)

El juego de la loto consiste en escoger 6 números, sin repetición, entre el 1 y el 42. Cada selección cuesta $1.00. Si juegas todas las posibles selecciones, ¿cuánto debes invertir? Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD G (Contemos)

10 hombres llegan a una fiesta y entregan a la entrada su sombrero. Al salir se les devuelve a cada uno un sombrero al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún hombre obtenga su propio sombrero? Justifica Tu respuesta.

ACTIVIDAD ¿ADIVINA QUÉ HAY?

Objetivos: **Calcular la frecuencia relativa de un suceso.**
Determinar si los posibles resultados de un experimento son igualmente posibles, usando la frecuencia relativa de éstos.
Determinar la probabilidad empírica de un suceso.
Determinar la probabilidad teórica de un suceso.

Materiales: **Cartulinas de los colores siguientes: azul, roja y amarilla; tijeras, bolsa no transparente**

PROCEDIMIENTO

1. Recorte las distintas cartulinas en cuadrados de una pulgada. Debe tener 15 cuadrados de cada color.
2. Divida la clase en grupos de cuatro estudiantes. Un estudiante de cada grupo deberá colocar en secreto una de las distribuciones siguientes:

   Bolsa #1: 6 cuadrados azules, 3 rojos y 3 amarillos

   Bolsa #2: 2 cuadrados azules, 8 rojos y 2 amarillos

   Bolsa #3: 1 cuadrado azul, 1 rojo y 10 amarillos

3. Luego, cada estudiante le entregará la bolsa que llenó a un grupo al cual no pertenezca, tal que ningún grupo sabe el contenido de la bolsa que se le entregó.

4. Cada uno de los miembros deberá repetir el experimento que se describe a continuación 24 veces. Sin mirar dentro de la bolsa uno de los estudiantes seleccionará un cuadrado. Otro anotará el color. Luego, se devuelve el cuadrado a la bolsa, se mueve la bolsa, y el otro miembro selecciona un cuadrado. Los resultados se deberán anotar en la tabla que aparece en la actividad.

5. Una vez se haya discutido el posible contenido de la bolsa, indíquele a los estudiantes que saquen los cuadrados de la bolsa y que determinen la probabilidad teórica de cada color. Pregúnteles cómo comparan las probabilidades obtenidas empíricamente y las teóricas.

RESPUESTAS

Parte A

Los valores que los estudiantes colocarán en las tablas no tienen que coincidir con los valores teóricos de la probabilidad para cada color.

La ley de los números grandes sugiere que la posibilidad de que el valor obtenido empíricamente para la probabilidad de un suceso sea significativamente distinto al teórico disminuye al aumentar el número de repeticiones del experimento.

1. No.
2. La aseveración es incorrecta pues supone que los colores tienen la misma oportunidad de ocurrir.

Parte B

Bolsa #1: 6 cuadrados azules, 3 rojos y 3 amarillos

P(azul) = $\frac{1}{2}$

P(rojo) = $\frac{1}{4}$

P(amarillo) = $\frac{1}{4}$

Bolsa #2: **2 cuadrados azules, 8 rojos y 2 amarillos**

P(azul) = $\frac{1}{6}$

P(rojo) = $\frac{2}{3}$

P(amarillo) = $\frac{1}{6}$

Bolsa #3: **1 cuadrado azul, 1 rojo y 10 amarillos**

P(azul) = $\frac{1}{12}$

P(rojo) = $\frac{1}{12}$

P(amarillo) = $\frac{5}{12}$

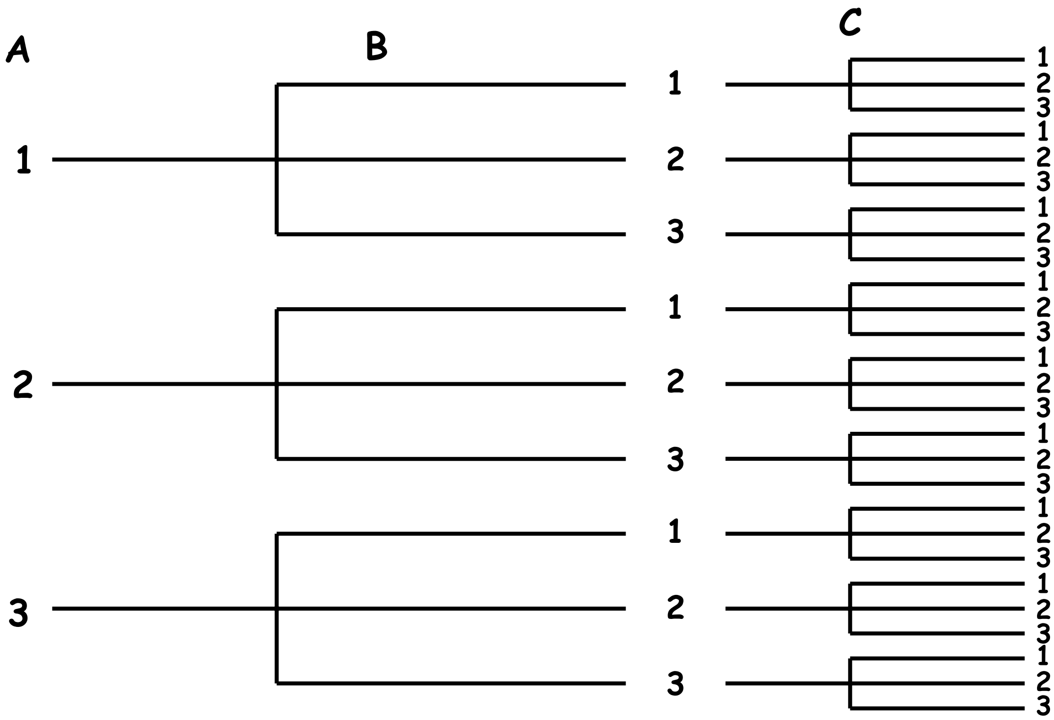
ACTIVIDAD UNO, DOS, TRES

Objetivos: **Hallar la probabilidad empírica de los resultados de un experimento.**
Hallar la probabilidad teórica de cada uno de los resultados.

Materiales: **transparencia cuadriculada, papel, lápiz**

NOTAS

1. Observe que este experimento se puede visualizar de la manera siguiente: "¿Qué suceso ocurre más veces durante las 27 tiradas: A, B o C? Note además, que los puntos estimados (que ellos creen que acumularán durante el juego) dividido entre 27 corresponde a lo que conocemos como probabilidad subjetiva de un suceso.
2. El jugador B es el que tiene mayor posibilidad de ganar y A el menos. Para explicar lo anterior solicite a los estudiantes que construyan el espacio muestral del experimento a través de un diagrama de árbol.



RESPUESTAS (Posibles Resultados)

(111)	211	311
(112)	212	312
(113)	213	313
(121)	221	321
(122)	222	322
(123)	223	323
(131)	231	331
(132)	232	332
(133)	233	333

$$P(A) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

$$P(B) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

$$P(C) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

ACTIVIDAD LA PROBABILIDAD GEOMÉTRICA

Objetivos: **Determinar, geométricamente, la probabilidad de un suceso.**
Comparar los valores empíricos y teóricos para la probabilidad de un suceso.

Materiales: **cartulina, tachuelas, presillas**

PROCEDIMIENTO

Divida a los estudiantes en grupos de 2 a 3 personas.

RESPUESTAS

Un posible error conceptual es que los estudiantes determinen que la probabilidad de cada suceso es $\frac{1}{3}$. Si este es el caso, pregunte si los tres sucesos tienen la misma posibilidad de ocurrir.

Las probabilidades teóricas son: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$

ACTIVIDAD ¿CÓMO CAE EL VASO?

Objetivo: **Determinar una probabilidad en forma experimental cuando no es posible hacerlo teóricamente.**

Materiales: **vaso plástico de 5 oz**
transparencia cuadriculada
calculadora

RESPUESTAS

Tabla 1:

n = número de intentos

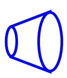
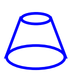
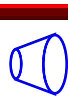
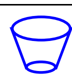
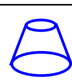
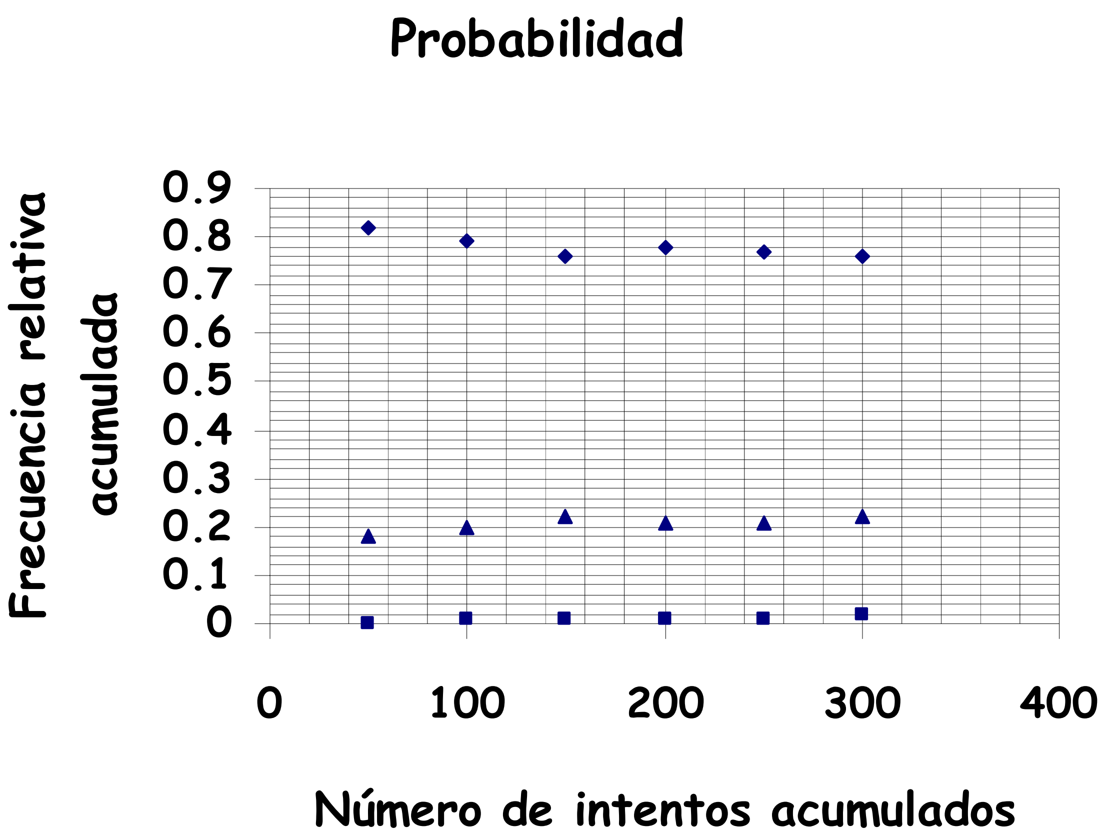
N	50	50	50	50	50	50
	41	38	35	42	37	30
	0	1	1	0	1	2
	9	11	14	8	12	18

Tabla 2:

N = número de intentos acumulados
FRA = frecuencia relativa acumulada

		n	50	100	150	200	250	300
FRA	**A**		0.82	0.79	0.76	0.78	0.772	0.74
FRA	**B**		0	0.01	0.013	0.01	0.012	0.017
FRA	**C**		0.18	0.20	0.227	0.21	0.216	0.24



Nota:

Los números que se presentan en la tabla anterior varían según el grupo. Debe enfatizarse que no se puede asegurar que el valor de la probabilidad empírica dejará de variar después de un número "grande" de repeticiones del experimento. Sin embargo, la ***ley de los números grandes*** establece que la probabilidad de que el valor determinado empíricamente varíe significativamente del valor teórico es cada vez más pequeña a medida que el número de repeticiones del experimento aumenta.

Objetivo: **Trazar e interpretar la gráfica de una función de probabilidad.**

Materiales: **papel cuadriculado**
calculadora

RESPUESTAS

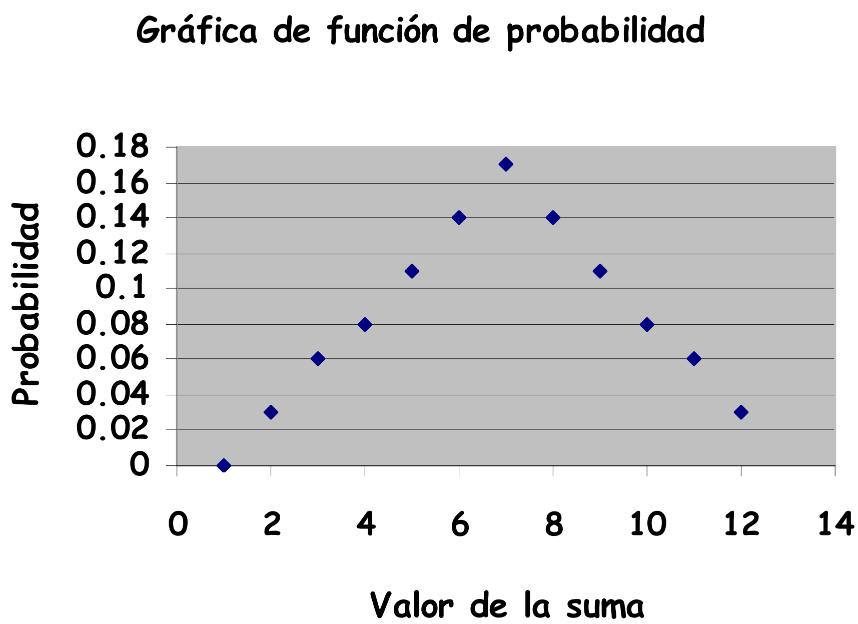
3. Sea **S** el espacio muestral, entonces

S = {(1, 1) (2, 1) (3, 1) (4, 1) (5, 1) (6, 1) (1, 2) (2, 2) (3, 2) (4, 2) (5, 2) (6, 2) (1, 3) (2, 3) (3, 3) (4, 3) (5, 3) (6, 3) (1, 4) (2, 4) (3, 4) (4, 4) (5, 4) (6, 4) (1, 5) (2, 5) (3, 5) (4, 5) (5, 5) (6, 5) (1, 6) (2, 6) (3, 6) (4, 6) (5, 6) (6, 6)}

4. Los posibles valores de x son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

5. Para determinar las probabilidades calculamos la frecuencia relativa de cada posible valor.

Valor x	**Frecuencia**	**Frecuencia relativa P(X = x)**
2	1	$\frac{1}{36}$
3	2	$\frac{2}{36}$
4	3	$\frac{3}{36}$
5	4	$\frac{4}{36}$
6	5	$\frac{5}{36}$
7	6	$\frac{6}{36}$
8	5	$\frac{5}{36}$
9	4	$\frac{4}{36}$
10	3	$\frac{3}{36}$
11	2	$\frac{2}{36}$
12	1	$\frac{1}{36}$



7.
   a. 0
   b. $\frac{1}{6}$
   c. $\frac{1}{2}$
   d. 1
   e. 0
   f. $\frac{15}{36}$

ACTIVIDAD EXPLORANDO ALGUNAS CARACTERÍSTICAS HUMANAS

RESPUESTAS

Éstas dependerán de los datos recogidos.

ACVTIVIDAD ¿ADIVINA QUÉ HAY?

Parte A

PROCEDIMIENTO

Una vez un compañero de clases te entregue la bolsa, cada uno de los miembros de tu grupo deberá repetir el experimento que se describe a continuación, 24 veces. Sin mirar dentro de la bolsa, uno de los estudiantes seleccionará un cuadrado. Otro anotará el color. Luego, se devuelve el cuadrado a la bolsa, se mueve la bolsa y el otro miembro selecciona un cuadrado. Los resultados se deberán anotar en la tabla que aparece a continuación:

Color	Frecuencia	Frecuencia relativa
Azul		
Rojo		
Amarillo		
Total		

1. ¿Tendrán los tres colores la misma posibilidad de ocurrir?
2. Discute la aseveración siguiente: "La probabilidad de seleccionar al azar un cuadro azul, independientemente de la bolsa, es $\frac{1}{3}$."
3. ¿Cómo están distribuidos los colores en la bolsa? Explica.

Parte B

Cuando tu maestro te lo indique, determina la probabilidad teórica de cada color. ¿Cómo compara ésta con las obtenidas?

ACTIVIDAD UNO, DOS, TRES

PROCEDIMIENTO

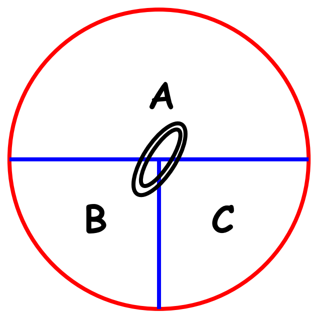
El juego consiste en que tres participantes **A**, **B**, **C** se paran en fila con su mano derecha cerrada colocada atrás. A una señal la mostrarán simultáneamente, enseñando uno, dos o tres dedos a su particular discreción. Si los tres muestran la misma cantidad de dedos, **A** gana un (1) punto. Si dos muestran la misma cantidad, **B** gana un (1) punto; y si muestran distintas cantidades, **C** gana un (1) punto.

1. Divídanse en grupos de cuatro estudiantes. Uno será el líder y anotador, y los otros tres jugadores serán **A**, **B** y **C**.
2. El líder dirige el juego y anota los puntos.
3. Cada grupo jugará el juego 27 veces.
4. Antes de jugar, se reunirán y discutirán sobre el número de puntos que el grupo cree cada cuál ganará y la razón para ello.
5. Lleven a cabo el juego. Expliquen la discrepancia, si alguna, entre la predicción y el resultado obtenido, indicando la frecuencia relativa de puntos obtenidos por **A**, **B** y **C**.
6. Luego, se presentará el informe de cada grupo. Se van marcando en la transparencia los puntos correspondientes a las frecuencias relativas acumuladas por **A**, **B** y **C**. Punto (# intentos, frecuencia acumulada)

ACTIVIDAD LA PROBABILIDAD GEOMÉTRICA

La probabilidad que se asigna a base de las propiedades de un experimento se llama ***probabilidad teórica*** mientras que la que se asigna después de ejecutar el experimento se llama ***probabilidad empírica***. En esta actividad compararemos ambas.

1. Con los materiales construye una ruleta como muestra la figura siguiente:



La presilla será la aguja (indicador)

   a. ¿En cuántas regiones está dividida el área del círculo?
   b. ¿Qué por ciento representa cada región?

2. Asígnale una probabilidad a cada uno de los eventos siguientes:

A	B	C

3. Gira la presilla 40 veces y anota el número de veces que la presilla apuntó a cada una de las regiones.

	A	B	C
Número de veces que la presilla cae en una región			
Probabilidad			

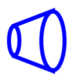
4. Explica cualquier diferencia entre la probabilidad teórica y la empírica.

ACTIVIDAD ¿CÓMO CAE EL VASO?

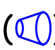
La actividad consiste en tirar un vaso plástico de 5 oz. Y determinar la probabilidad de que caiga en las posiciones siguientes: 

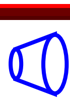
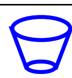
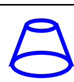
PROCEDIMIENTO

1. Tira el vaso 50 veces y registra la forma en que cae. Luego, calcula la frecuencia relativa de caída para cada forma.

n = 50	**Frecuencia**	**Frecuencia relativa**
		
		
		

2. Espera a que todos tus compañeros hayan terminado para informar los resultados.

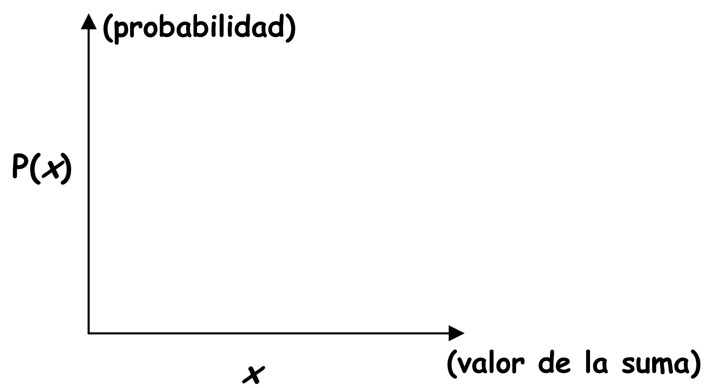
3. Al informar se van acumulando los totales individuales y a la vez se marcará en el sistema de coordenadas el punto correspondiente a: (n, P_{exp}()), (n, P_{exp}()), (n, P_{exp}()), donde n es el total de intentos acumulados y P_{exp}(*) = frecuencia relativa acumulada (FRA).

		n	**50**	**100**	**150**	**200**	**250**	**300**
FRA	**A**							
FRA	**B**							
FRA	**C**							

1. Experimento: Se tiran dos dados.
2. Notación:

   a. ***X*** = variable de interés, es la suma de las caras superiores de los dados
   b. ***x*** = un valor que pueda asumir la variable ***X***
   c. P(***x***) = probabilidad de que la suma sea ***x***

3. Escribe todos los posibles resultados de este experimento.
4. Determina todos los valores de X.
5. Determina la probabilidad de cada evento.
6. Localiza en un sistema de coordenadas los pares (x, P(x)), como se ilustra.



7. Utiliza la gráfica para contestar lo siguiente:

   ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea:

   a. 1?
   b. 3 ó 5?
   c. un número par?
   d. menos de 13?
   e. al menos 13?
   f. menor que 7?

8. Construye un histograma para los datos anteriores.

ACTIVIDAD EXPLORANDO ALGUNAS CARACTERÍSTICAS HUMANAS

Estudiaremos 5 características hereditarias, a saber:

CARACTERÍSTICA	DESCRIPCIÓN
1. Pelo del dedo	pelo en la sección del medio de cada dedo
2. Pico de viuda	pico en el centro de donde comienza el cabello
3. Lóbulos libres	la parte inferior del lóbulo no está pegada a la cabeza
4. Enrollar la lengua	enrollar la lengua en forma de U
5. Manos entrelazadas	cuando se entrelazan los dedos de las manos, el pulgar izquierdo cae en forma natural arriba

Cada persona en el grupo determinará si posee o no posee esta característica y completará la tabla siguiente:

Característica	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
SI					
NO					

Cada grupo discutirá las preguntas siguientes:

1. ¿Cuántas personas poseen las 5 características?
2. ¿Qué característica ocurrió con más frecuencia?
3. ¿Desde el punto de vista teórico, qué esperarías con más frecuencia, tener 2 características o tener 3 características? Explica.
4. ¿Cuántos pares de características diferentes se pueden determinar?
5. ¿Cuántas ternas de características diferentes se pueden determinar?
6. A la luz de lo que contestaste en la pregunta 4 y 5, ¿estás de acuerdo con tu contestación de la pregunta 3? Explica.

Utilizando a todo el grupo se determinará la probabilidad experimental de cada característica. La información se organizará en una tabla como la siguiente:

	Pelo del dedo	**Pico de Viuda**	**Lóbulos libres**	**Enrollar lengua**	**Entrelazar dedos**
P(si)					
P(no)					

1. ¿Cuál es la relación entre P(si) y P(no) en cada característica?
2. Si P(enrollar lengua) = .7, halla P(no enrollar lengua). Explica cómo determinaste la probabilidad.
3. Halla la razón P(sí)/P(no) para cada característica. Compara estas razones.
4. Utiliza los datos del grupo para predecir cuántas personas en tu escuela tienen lóbulos libres.
5. Si se recopila información de estas 5 características en todo Puerto Rico.
    a. ¿Cómo diferirán los datos de todo Puerto Rico de los datos del grupo?
    b. ¿Consideras que la combinación de las 5 características que ocurrieron más a menudo en tu grupo ocurrirá también en todo PR? Explica.

ACTIVIDAD LA PROBABILIDAD DESDE OTRO PUNTO DE VISTA

INTRODUCCIÓN

Los **genes** que usted hereda de sus padres están en 23 pares de **cromosomas**. Muchos de los genes también están en pares, donde a cada miembro del par se le llama **alelo**. Durante la fecundación del óvulo en la reproducción, dos alelos se combinan, uno de cada padre. Estos dos alelos pueden ser iguales o diferentes y estos pueden afectar una característica de manera similar o diferente. Cuando los alelos en un par son diferentes, la característica que se manifiesta se llama la característica **dominante**. Por ejemplo, los alelos para el color de pelo de un tipo de ratones codifican para color negro y blanco; cuando cruzamos ratones de pelo negro y ratones de pelo blanco, aunque los hijos tienen genes para blanco pueden salir negros, en este caso decimos que el negro domina sobre el blanco.

La otra se llama la característica **recesiva**. El par de alelos que determina la presencia o ausencia de una característica en particular se llama el **genotipo**. La característica que ocurre se le conoce con el nombre de **fenotipo**.

En el caso de las orejas, hay dos posibles fenotipos: lóbulos libres o lóbulos pegados. El lóbulo libre es la característica dominante y solemos representar el alelo para el lóbulo libre con la letra mayúscula **F**. El lóbulo pegado es una característica recesiva y se le asigna la letra **f** minúscula.

Hay cuatro posibles combinaciones de los dos alelos: FF, Ff, fF, ff. Sin embargo, como Ff y fF son genéticamente iguales, se acostumbra escribir Ff en vez de fF. Esto nos dice que existen sólo tres genotipos posibles (FF, Ff, ff). Cuando los dos alelos en un par son diferentes, el dominante se impone sobre el recesivo. Debido a que los lóbulos libres son una característica dominante, todos los genotipos FF, Ff proporcionan el fenotipo para los lóbulos libres. Sólo se obtiene el fenotipo para el lóbulo pegado (recesivo) con el genotipo ff.

En la actividad anterior, usted determinó la probabilidad experimental de varias características a través de la información provista por el grupo. Conociendo el concepto de genotipo y fenotipo usted puede encontrar la **probabilidad teórica** de una característica heredada.

La probabilidad teórica para un experimento se define como:

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de posibles resultados}}$$

Si se conoce los genotipos de ambos padres para una característica en particular, se puede determinar la probabilidad de cada posible genotipo para su hijo. El **espacio muestral** es el conjunto de todos los posibles resultados para un experimento dado. En el campo de la genética la combinación de genes de dos progenitores se conoce por el nombre de cruce. Cuando se desea analizar el espacio muestral para un cruce genético, la mejor forma es usando una matriz de Punnet. La matriz siguiente muestra el cruce de dos padres con el mismo genotipo híbrido para lóbulos libres, en símbolos, **Ff** × **Ff**. Cada alelo en el genotipo de un padre tiene la misma probabilidad de ser pasado a su hijo.

Madre
Ff

Padre
Ff

	F	**f**
F	FF	Ff
f	Ff	ff

Observa que el espacio muestral consta de 4 resultados: **FF, Ff, Ff, ff**. Estudia bien la matriz para contestar las preguntas a continuación:

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el genotipo **FF**? (.25)
2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el genotipo **ff**? (.25)
3. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el genotipo **Ff**? (.50)
4. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el genotipo donde un alelo es dominante y el otro alelo es recesivo? (.50)
5. ¿Cuál es la probabilidad de que un hijo tenga lóbulos libres? (.75)
6. ¿Cuál es la probabilidad de que un hijo tenga lóbulos pegados? (.25)

¿Será posible predecir alguna característica que recibirá un hijo aunque no se conozca los genotipos de los progenitores? Para contestar esta pregunta, contesta las preguntas a continuación.

1. Representa mediante la letra **D** a un alelo dominante y mediante la letra **d** a un alelo recesivo. Haz un listado de todos los posibles genotipos que consisten de cualquier combinación de estos alelos. ¿Cuántos genotipos diferentes obtuviste?
2. Usando una matriz de Punnet halla el espacio muestral de todos los posibles cruces de padres con los genotipos que hallaste en la parte (1). ¿Cuántos diferentes genotipos encontraste en los cruces?
3. Determina la probabilidad para cada genotipo. ¿Cuál genotipo tiene la probabilidad mayor?
4. Determina la probabilidad para cada fenotipo.
5. ¿Cuál alelo (el dominante o el recesivo) produce el fenotipo con la probabilidad mayor si se consideran todos los posibles cruces? Explica tu contestación.
6. Si tienes un amigo que no tiene pelo en la sección media del dedo (característica recesiva), ¿cuáles son los posibles genotipos de sus padres? Explica tu contestación.
7. Si tienes pelo en la sección media del dedo (característica dominante), ¿cuáles son los posibles cruces que producen este fenotipo? Explica.

OTRAS ACTIVIDADES

1. Mi amiga Evelyn cuando entrelaza sus manos, el pulgar izquierdo cae en forma natural arriba (característica dominante) mientras que su madre pone el pulgar derecho arriba en forma natural (característica recesiva). ¿Cuáles son los posibles genotipos para Evelyn, su madre y su padre?

2. Los dos padres de Pepe tienen lóbulos libres. Sin embargo, Pepe no tiene lóbulos libres.
   a. Halla todos los posibles genotipos de los padres de Pepe que hacen posible que tengan un hijo con lóbulos pegados.
   b. Utiliza una matriz de Punnet junto con los genotipos que hallaste en la parte (a) para hallar todos los posibles genotipos para un hijo de esos padres.
   c. Determina la probabilidad de que un hijo de los padres de Pepe **no** tenga lóbulos libres.

ACTIVIDAD LA GRAN INTERROGANTE: ¿SER INDEPENDIENTE O SER DEPENDIENTE?

En actividades anteriores vimos algunos de los rasgos que heredamos. En la próxima actividad estudiaremos la dependencia e independencia de dos rasgos dados. Algunas características o rasgos están relacionados con el género de la persona; mientras que otras están relacionadas con otros rasgos que no están relacionados con el género.

- Si un padre tiene genotipo **Rr**, ¿cuál es la probabilidad de que un hijo reciba el alelo **R**, el alelo **r**?

- En un cruce **Rr** x **Rr**, las probabilidades para los genotipos **RR**, **Rr** y **rr** son $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, respectivamente. ¿Cómo podrías hallar la probabilidad del genotipo para un(a) hijo(a) basado en la probabilidad de recibir un alelo particular del padre y otro de la madre, como por ejemplo que reciba del padre el alelo **R** y de la madre el alelo **r**?

1. Cada grupo seleccionará dos rasgos humanos, tales como la presencia del pico de viuda y la habilidad de enrollar la lengua.

2. Usando la tabla preparada en la Actividad I, cuenta cuántos de tus compañeros exhiben cada uno de esos dos rasgos y cuántos exhiben ambos rasgos.

3. Completa la tabla siguiente.

Rasgo A:			
Rasgo B:			
Cantidad total de individuos =			
	Cantidad de individuos con el rasgo A	**Cantidad de individuos con el rasgo B**	**Cantidad de individuos con ambos rasgos (A y B)**
Frecuencia			
Probabilidad			

Contesta las preguntas siguientes:

1. ¿Qué relación observas, si alguna, entre las probabilidades siguientes?

   a) P(A) y P(B)

   b) P(A) y P(A y B)

   c) P(B) y P(A y B)

   d) P(A), P(B) y P(A y B)

2. ¿La ocurrencia de algún rasgo parece depender de la ocurrencia de algún otro rasgo?

3. Da ejemplos de eventos independientes y de eventos dependientes. Justifica tu respuesta.

4. De las parejas de eventos que siguen a continuación, ¿cuáles son independientes y cuáles son dependientes? Justifica tu contestación.

    a. La habilidad de enrollar la lengua; tener pelos en la parte media de los dedos.

    b. Tener un niño como primer hijo; tener una niña como segundo hijo.

    c. Ser masculino; tener rasgos de calvicie.

5. Construye un diagrama de árbol para un cruce **Rr** x **Rr,** y halla la probabilidad para cada genotipo.

6. Si en una pareja ambos tienen el genotipo **Mm** para el pelo en la parte media del dedo; el padre tiene el genotipo **WW** y la madre el genotipo **Ww** para el pico de viuda. Presumiendo que estos dos rasgos son independientes, halla la probabilidad de que un hijo herede ambos rasgos.

7. Los antígenos son proteínas que pueden activar el sistema inmunológico. Tu tipo de sangre es determinado por la presencia o ausencia de los antígenos A y B sobre las células rojas de la sangre. Si tu sangre sólo posee el antígeno A entonces es de tipo A, si posee el antígeno B entonces es de tipo B, si posee ambos antígenos A y B entonces es de tipo AB y si no posee ninguno de los dos entonces es de tipo O.

    Otro antígeno que afecta al tipo de sangre lo es el factor Rh. Si la sangre posee este antígeno entonces tiene un Rh positivo (+) y si no lo posee tiene un Rh negativo. Entonces hay ocho posibilidades distintas, a saber: A^+, B^+, AB^+, O^+, A^-, B^-, AB^-, O^-.

Si en tu clase de matemáticas recopilaste los datos de 26 estudiantes y obtuviste los resultados siguientes:

Tipo de sangre	Cantidad de estudiantes	Factor Rh	Cantidad de estudiantes
A	10	Rh^+	20
B	4	Rh^-	6
AB	1		
O	11		

a. Determina la probabilidad de cada uno de los cuatro tipos de sangre: A, B, AB y O.

b. Determina la probabilidad de la presencia o ausencia del factor Rh.

c. Presumiendo que el tipo de sangre y la presencia o ausencia del factor Rh son rasgos independientes, dibuja un diagrama de árbol que muestre las probabilidades de cada una de las ocho combinaciones.

d. Si el día que se hizo el experimento hubo cinco estudiantes ausentes y la clase fue agrupada por el tipo de sangre de los estudiantes (A, B, AB y O), ¿cuántos de los cinco estudiantes pertenecerán a cada uno de los cuatro grupos?

Simulaciones

INTRODUCCIÓN

La simulación es un recurso que tiene la ciencia, la matemática y la industria para analizar situaciones para las cuales no resulta práctico hacerlo directamente. Como ejemplo, una compañía produce un lote de piezas bajo estrictos controles de calidad. Por condiciones inherentes al proceso, cierta cantidad de piezas salen defectuosas. La compañía necesita producir una gran cantidad de estos lotes. ¿Cómo puede decidir la gerencia si se procede con la producción? Una posibilidad sería producir varios lotes y ver si las pérdidas son económicamente aceptables. Representa un riesgo económico muy alto. En situaciones como ésta, es más práctico analizar la situación a través de una simulación.

Una simulación es un modelo que se establece de un experimento, donde cada posible ocurrencia en el experimento es representada por uno o más elementos del modelo. Además, el procedimiento para llevar a cabo la simulación cumple con las condiciones establecidas para el experimento, de forma tal que, la probabilidad asociada con cada ocurrencia en el experimento es la misma que la que se asocia con los elementos del modelo que la representa. En el documento de los *"Estándares Curriculares para la Educación Matemática del Concilio Nacional de Maestros de Matemática" (NCTM,* por sus siglas en inglés) se afirma en el estándar de probabilidad para el nivel secundario:

"Es igualmente importante que los estudiantes conozcan las diferencias que existen entre las técnicas teóricas y de simulación, así como las ventajas que llevan asociadas. Más importante aún es que los estudiantes lleguen a valorar ambos enfoques. Por ejemplo, los estudiantes podrían llegar a un resultado por medio de la aplicación de un modelo teórico y validar dicho resultado por medio de una simulación. Lo que no se debe enseñar es que solo el enfoque teórico llega a la solución correcta.

Aunque la probabilidad ofrece modelos de utilidad para la resolución de problemas en áreas tales como la medicina, la física y la economía, muchos problemas de la vida real pueden entenderse mejor desde este punto de vista".

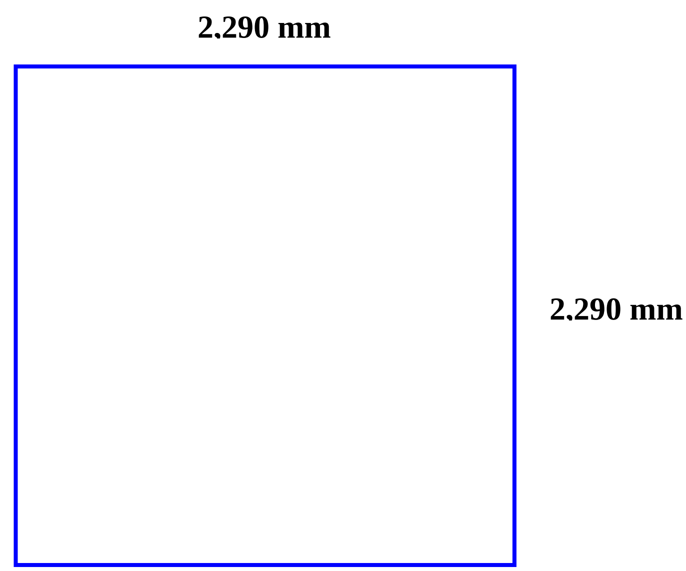
Hay diferentes técnicas para crear una simulación. En una simulación geométrica podemos usar una región para representar el espacio muestral de un experimento y subregiones para las ocurrencias.

Ejemplo: *Simulación del Juego de la Loto*

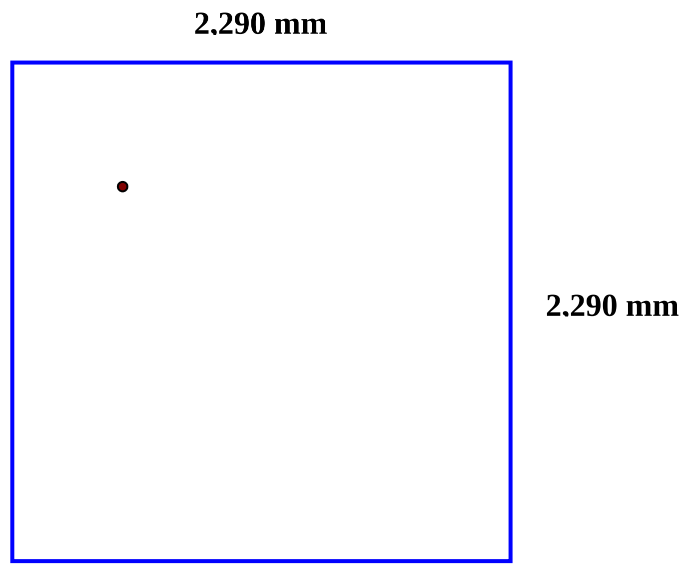
En el juego de la Loto el jugador selecciona 6 números sin repetición entre el 1 y el 42, ambos inclusive. El orden de selección no importa. Para determinar la combinación ganadora, se extraen al azar 6 bolos numerados del 1 al 42, de una tómbola. Se establece matemáticamente que hay 5,245,786 diferentes maneras de escoger los 6 números cuando el orden de selección no importa.

Simulación:

Preparar una lámina cuadrada con lado que mida 2.29 metros (el área es 5,244,100mm^2)



Se le vendan los ojos a una persona. Se coloca al azar una región cuadrada de un milímetro dentro de la lámina.



La persona tratará de tocar con la punta de un alfiler la región ubicada al azar de un solo intento. La oportunidad que tiene de lograrlo es ligeramente mayor que la de ganarse la Loto jugando una combinación de $1.00.

En este taller estudiaremos simulaciones con números aleatorios que son números generados al azar usando algún proceso aleatorio como tirar dados, extraer papeles numerados de una tómbola, etc. Aquí los generaremos con la calculadora.

El procedimiento para crear una simulación con números aleatorios usando la calculadora requiere los siguientes pasos:

1. Asigne un conjunto de números aleatorios a cada ocurrencia en el espacio muestral del experimento a ser simulado. La probabilidad de que se genere un número del conjunto asignado tiene que ser la misma que la de la ocurrencia.

2. Decida cuantos intentos llevará a cabo.

3. Genere los números aleatorios que sean necesarios para que correspondan a un intento en el experimento real.

La probabilidad estimada del evento real que se interesa es la frecuencia relativa con que ocurre su representante en los intentos de simulación.

ACTIVIDAD EXPLORANDO SIMULACIONES CON NÚMEROS ALEATORIOS

Objetivo: **Repasar conceptos básicos de probabilidad, números aleatorios, simulaciones y uso de la calculadora.**

Materiales: **Calculadora para cada participante**

PROCEDIMIENTO

1. Repase brevemente conceptos: experimento aleatorio, espacio muestral, ocurrencia, evento, probabilidad experimental, intento.

2. Presente una breve introducción de simulación; números aleatorios; uso de las teclas *rand, randInt(, Int(* para generar números aleatorios, sembrar una semilla en *rand.*

3. Para ilustrar la importancia de sembrar una semilla diferente cada vez que inicien una nueva simulación, haga lo siguiente:

   a) Pida que siembren 2 en rand (2 $\rightarrow$ rand) y generen 3 números aleatorios, los cuales anotarán. Luego, siembran el 3 en *rand*, generan 3 números aleatorios y los anotan. Vuelven a sembrar el 2 en *rand*, generan 3 números aleatorios y los comparan con los generados previamente. Siembre el 3 en *rand* y repetir lo anterior. Discuta lo observado.

   Indique, para los que tienen conocimientos de programación, que se siembra una semilla en un programa con las instrucciones

$$\boxed{\textbf{Prompt}} \quad \boxed{x}$$

$$\boxed{x} \quad \boxed{\textit{sto}} \quad \boxed{\textit{rand}}$$

4. a) Para ver cuánto asimilaron de lo ya discutido solicite que sugieran maneras de simular el tirar una moneda y obtener cara o cruz. Escriba en una transparencia las simulaciones sugeridas para que todos las lleven a cabo. Ayude a confeccionar las instrucciones si es necesario.

   b) Si nadie sugiere alguna, presente la siguiente:
   sembrar una semilla en *rand* (pueden ser los últimos 4 dígitos de su número telefónico).

   :***rand Int (1,2)*** (el 1 representa *cara* y el 2 representa *cruz*)

   Apretar repetidas veces ENTER

   Si se quiere obtener los resultados más rápidamente

   :sembrar semilla en *rand*
   :*rand Int (1,2,7)*
   :Enter

   Se generan 7 tiradas con cada enter. Se pueden sumar los resultados obtenidos por todos los participantes para tener un número mayor de intentos.

5. Para los interesados, puede presentarles el siguiente programa que simula *n* tiradas de la moneda y presenta el total de *caras*, *cruces* obtenidas, y su probabilidad experimental.

Programa: *Caracruz*

:Output (1, 1, "Este programa simula tirar una moneda. Entre en la primera *x* el total de intentos")
:Pause
:Clr Home
:0→*A* : 0→B : 0→*C* : 0→D : 0→E : 0→F : 0→*G*
:0→M
:Prompt *x*
:*x*→*D*

:*RandInt* (1,100)→*rand*

:LBLH

:rand Int(1,2)→*A*

:If *A*=1 [Nota: 1 representa cara, 2 representa cruz]

:Then

:E+1=E

:*C*+1=*C*

:Else

:B+1→B

:*C*+1→*C*

:End

:If *C*<D

:Goto H

:Disp "Cara", E [Nota: En *E* se acumula el total de caras obtenidas al ejecutar los *x* intentos almacenados en *D*. En *B* las cruces.]

:Disp "Cruz", B

:Pause

:E+F→F [Nota: En *F* se van acumulando el total de caras obtenidas al repetir el experimento. En *G* las cruces.]

:B+*G*→*G*

:F+*G*→M [Nota: En *M* se registra el total de tiradas de la moneda hasta ese momento.]

:Disp "Total", *M*

:Disp "Cara", *F*, $\frac{F}{M}$

:Disp "Cruz", *G*

:Pause

:0→A: 0→B: 0→*C*: 0→E

:D+10→D [Nota: Se añaden 10 nuevos intentos a los anteriores para cuando se repita de nuevo el programa.]

:Disp "Nuevos intentos", D

:Pause

:Goto *H*

Objetivo: **Simular cómo se disemina una epidemia dentro de un grupo de personas.**

Materiales: **calculadora gráfica TI-83**

PROCEDIMIENTO

1. Repase cómo usar la calculadora para generar números aleatorios, almacenar datos en listas y construir gráficas usando el menú "stat". Explique al grupo el objetivo de la actividad.

a. Asigne un número diferente a cada participante comenzando con el 1 hasta el total del grupo. Entregue una calculadora y la guía del estudiante a cada participante.

b. Explique al grupo que luego de completarse el paso 2 de la guía del estudiante, cada calculadora estará programada para generar los números asignados en forma aleatoria. Cuando un participante escuche su número se pondrá de pie ya que ha sido contagiado.

c. Solicite que cada participante ejecute el paso 2. Si alguien tiene dificultad puede ayudarlo.

d. Después que cada participante haya ejecutado el paso 2, informe que usted es el primer contagiado y representa en la tabla el intento 0. Apretará ENTER para contagiar a algún participante para el intento 1, quien se pondrá de pie. Ahora hay 2 contagiados y se pasa al próximo intento. En cada intento todos los contagiados, excepto usted, apretarán ENTER para producir los nuevos contagios entre los que quedan sentados. Después de cada intento, todos deben registrar en su tabla el total de contagiados (todos los que están parados). Se debe completar hasta el intento 9.

6. Después de completar el intento 9, solicite que cada cual continúe con la actividad (pregunta 3 en adelante), y luego discútala.

RESPUESTAS

1. Eje horizontal con los intentos
   Eje vertical con los contagiados
2. Normalmente la curva obtenida debe tener forma de  .
3. Debe mantener la misma forma.
4. Un posible procedimiento sería el siguiente:
   En cada intento apriete ENTER tantas veces como números diferentes se hayan obtenido en todos los intentos anteriores. El total de contagiados es 1 más que el total de números obtenidos.

Ejemplo para n=30

INTENTO	POSIBLES NÚMEROS OBTENIDOS	VECES QUE APRETARÁ ENTER
1	27	1
2	17	2
3	30, 23	4
4	29, ~~29~~, 21, 8	7
5	4, ~~29~~, 28, 13, 26, ~~27~~, ~~27~~	11
6	~~29~~, ~~28~~, 3, 7, 24, 18, 25, 1, 15, ~~23~~, 6	19
7	~~27~~, ~~21~~, ~~26~~, ~~4~~, ~~15~~, 2, ~~21~~, ~~18~~, ~~6~~, 22, ~~29~~, 5, ~~7~~, 14, ~~2~~, ~~29~~, ~~8~~, ~~5~~	23
8	~~25~~, 9, 10, ~~18~~, 12, ~~27~~, 19, ~~24~~, ~~12~~, ~~9~~, 23, ~~21~~, ~~2~~, ~~29~~, ~~2~~, ~~26~~, ~~26~~, ~~10~~, ~~6~~, ~~15~~, ~~5~~, ~~21~~, ~~22~~	27
9	~~26~~, ~~3~~, ~~14~~, ~~10~~, ~~8~~, ~~13~~, ~~25~~, ~~19~~, ~~28~~, ~~30~~, ~~28~~, ~~7~~, ~~13~~, ~~26~~, ~~21~~, ~~17~~, 12, ~~23~~, ~~10~~, ~~2~~, ~~22~~	28

Esta actividad se generó tomando como modelo la actividad "Atchoo" de *Texas Institute.
DWD – Dealing with Data in Middle School

ACTIVIDAD DADOS

Objetivo: **Simular el juego de dados conocido como "Seven Eleven"**

Materiales: **Calculadora gráfica TI-83**

PROCEDIMIENTO

1. Discuta las reglas del juego "Seven Eleven".

2. Informe que el objetivo de la simulación es que escriban las instrucciones precisas para simular el juego, determinando ganador y perdedor, usando números aleatorios.

RESPUESTAS

1. Una manera de representar la tirada de 2 dados y registrar su suma es *rand Int(1,6)+rand Int(1,6)*

2. Una posible simulación
   Entre en la calculadora las instrucciones
   :n→rand (n un número cualquiera $\neq 0$)
   :rand Int(1,6)+rand Int(1,6)
   :Enter

Al apretar $\boxed{\text{ENTER}}$ la primera vez corresponde a la primera tirada. Si se obtiene 7 ú 11 se gana; si se obtiene 2, 3 ó 12 se pierde. Si no ocurre se vuelve a apretar $\boxed{\text{ENTER}}$ hasta que primero se obtenga un 7 (perdió) o se repita el primer número (ganó).

Un programa para esta simulación:

Programa: Dados

```
:Prompt x : x→rand
:Goto H
:LBLH
:rand Int (1,6) + rand Int (1,6)→A
:If A=7 or A=11
:Then
:Disp "Gane"
:Pause
:Goto H
:Else
: If A=2 or A=3 or A=11
:Then
:Disp "Perdí"
:Pause
:Goto H
:End
:Goto J
:LBLJ
:rand Int(1,6)+rand Int(1,6) →B
:If B=7
:Then
:Disp "Perdí"
:Pause
:Goto H
:Else
:If B=A
:Then
:Disp "Gane"
:Pause
:Goto H
:End
:Goto H
```

[Nota: Cuando no quiera jugar más presione $\boxed{\text{ON}}$, $\boxed{\text{ENTER}}$

ACTIVIDAD GANÉ EL PREMIO

Objetivo: **Crear una simulación con números aleatorios usando la calculadora.**

Materiales: **calculadora gráfica**

PROCEDIMIENTO

1. Organice el grupo en subgrupos de 3 participantes.

2. Lea en voz alta la actividad. Luego, pregunte por la sucesión de eventos que debe ocurrir para que alguien gane el premio. Indique que una simulación consistirá en representar esa sucesión de eventos con números aleatorios. Solicite que lleven a cabo la actividad. Luego, cada grupo presentará sus resultados y se decide por consenso cuál es la mejor.

   Una posible simulación puede ser:

   :rand Int(1, 100)→rand

   :rand Int(0, 9, 7)

   :Enter

   [Nota: Se crea una sucesión de 7 enteros entre 0 y 9, ambos inclusive. Corresponden a los cupones encontrados al comprar 7 cajas de cereales.]

   Observe cuando por primera vez se completan todos los enteros del 0 al 9. Cuente el número de dígitos necesario para ello. Este representa la cantidad de caja comprada. Repita varias veces y saque el promedio aritmético.

   Ejemplo:

Intento	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
# cajas	**29**	**18**	**20**	**25**	**33**	**56**	**20**	**43**

Promedio: 30 cajas

Ejemplo: Se presiona ENTER 7 veces;

{$\boxed{3}$ 3 $\boxed{2}$ $\boxed{9}$ 9 3 $\boxed{1}$}	1er intento
{$\boxed{8}$ $\boxed{7}$ $\boxed{4}$ 1 7 $\boxed{0}$ 2}	27 cajas compradas
{1 8 $\boxed{5}$ 3 7 0 1}	para tener los 10
{4 4 9 5 2 $\boxed{6}$ 7}	cupones con los
{5 5 0 7 8 7 2}	números del 0 al 9
{0 3 4 1 3 0 6}	
{4 1 9 2 5 7 4}	

ACTIVIDAD HORNEANDO GALLETITAS

Objetivo: **Crear simulaciones con números aleatorios usando la calculadora.**

PROCEDIMIENTO

1. Organice el grupo en subgrupos de 3.
2. Lea la actividad en voz alta. Explique que los números en el cuadriculado representan una ayuda para facilitar la creación de la simulación ya que permiten identificar cada molde y por tanto cada galletita con un par ordenado de números entre 0 y 9. Solicite que trabajen la actividad y luego pasen a discutirla.

RESPUESTAS

Una posible simulación consiste en generar 100 pares ordenados de números aleatorios entre 0 y 9. Cada par representa una bolita de chocolate que cayó en el molde correspondiente. Se marca un punto en ese molde. Luego, se cuenta todos los que tienen 0, 1, 2,... puntos para llenar la tabla de la pregunta 2:

La simulación (instrucciones):

:rand Int (1, 100)→rand
:rand Int (0, 9, 2)
:Enter (Repetir 100 veces)

PROCEDIMIENTO

1. Se te asignará un número entre 1 y el total de participantes. Te pondrás de pie cuando escuches tu número.

2. En tu calculadora presiona las teclas siguientes en el orden indicado, y luego deténte para más instrucciones.

   a. [2nd] [mode] [clear]

   b. Cuatro dígitos cualesquiera. Pueden ser los últimos 4 dígitos de tu número telefónico.

   c. [sto] [math] (◁) [1] [Enter]

   d. [math] (◁) [5]
   Aquí debe aparecer en pantalla randInt(.

   e. [1] [,] [n]
   n será el número total de participantes.
   [)]

   ¡¡Detente aquí!! Espera instrucciones. En tu pantalla debe aparecer randInt(1,n)

3. Luego de completar la tabla 1, de acuerdo a las instrucciones recibidas, presiona las teclas siguientes en el orden indicado.

   a. [stat] [4] [(] [2nd] [1] [,] [2nd] [2] [)] [Enter]

   [Nota: Borra los datos, si algunos, de las listas L_1, L_2]

   b. [stat] [Enter]

[Nota: Aparecen en pantalla las listas L_1, L_2, L_3]

c. Usando la tabla 1, entre los intentos en la lista L_1 y los contagios en la lista L_2. Luego continua con d.

d. $\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{Y=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{Enter}}$ $\boxed{\triangledown}$ $\boxed{\text{Enter}}$ $\boxed{\triangledown}$ $\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{1}$
$\boxed{\text{Enter}}$ $\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{Enter}}$ $\boxed{\triangledown}$ $\boxed{\text{Enter}}$

e. $\boxed{\text{Zoom}}$ $\boxed{9}$

[Nota: Debe aparecer la gráfica de una curva en pantalla]

4. Representa gráficamente los datos de la tabla 1 en la gráfica 1 (debe ser similar a la de la pantalla)

Contesta las preguntas siguientes:

1. ¿Cómo identificas los ejes en la gráfica 1?

2. Describe brevemente la forma de la gráfica.

3. De acuerdo a la simulación hecha, describe cómo se disemina la epidemia.

4. ¿Cómo crees que se afectará la forma de la gráfica si se aumenta el número de personas?

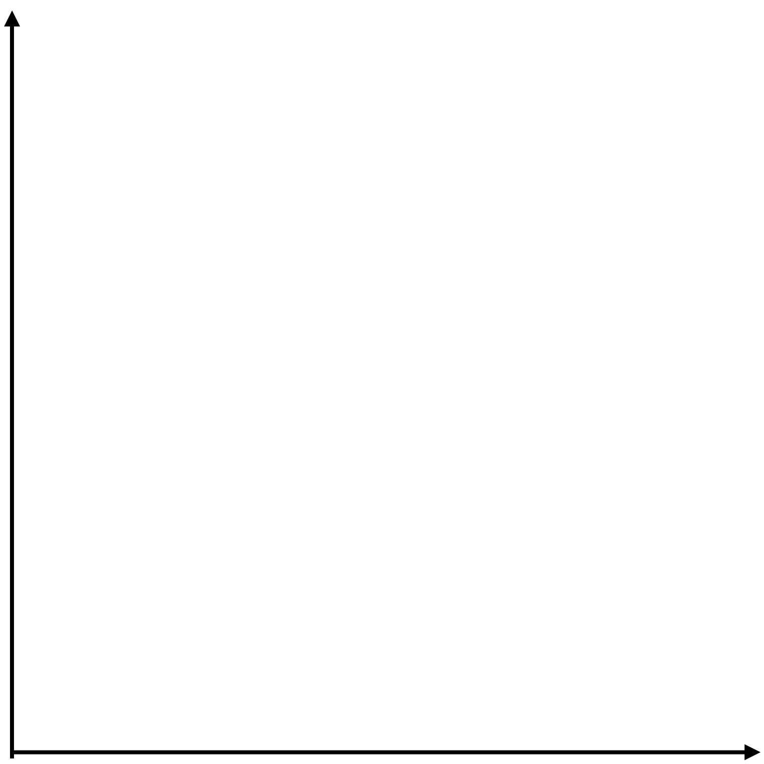
5. En una situación real, ¿qué factores crees que aumentan la rapidez con que se propaga una enfermedad contagiosa?

6. Diseña un procedimiento mediante el cual puedas llevar a cabo, con tu calculadora, esta misma simulación sin necesitar el resto de los participantes.

Tabla 1

Número de intentos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Número de contagiados	**1**	**2**								

Gráfica 1



ACTIVIDAD DADOS

INTRODUCCIÓN

El juego de dados "Seven-Eleven" consiste de las reglas siguientes:

> Se tiran dos dados y se suman los números obtenidos. Si en la primera tirada se obtiene un 7 ó un 11, gana el que tira. Si se obtiene un 2, 3 ó 12 pierde el que tira. Si no se obtiene alguno de los anteriores, ni se gana ni se pierde, y se sigue tirando hasta que ocurra la primera de dos sumas: un 7 (pierde el que tira) o se repite la primera suma tirada (gana el que tira).

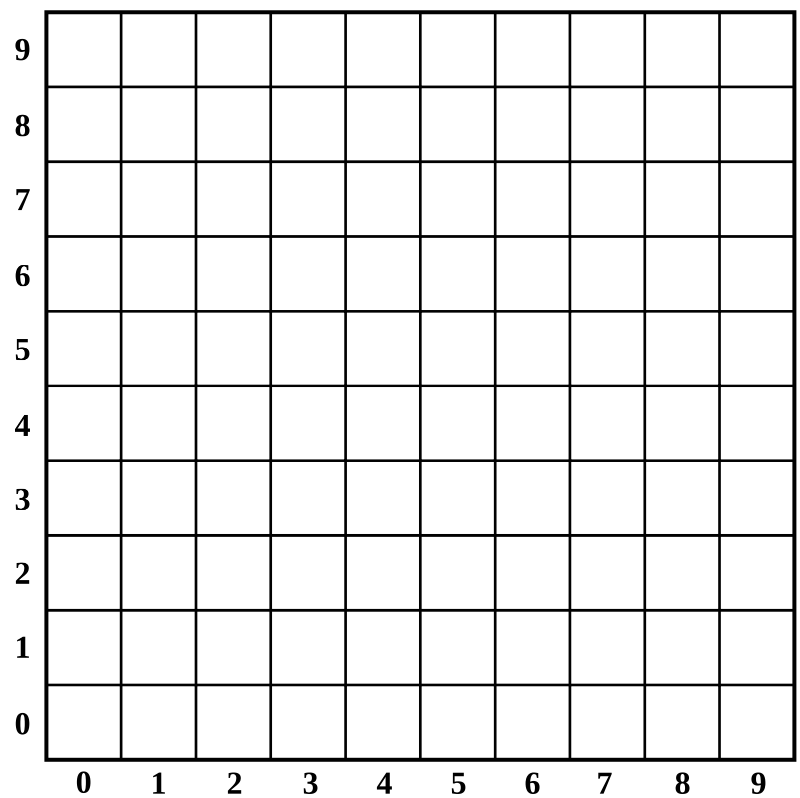
1. Halla una forma de simular la tirada de dos dados y registrar su suma, usando números aleatorios.
2. Diseña una simulación del juego "seven-eleven" en la que se identifique claramente el ganador.

ACTIVIDAD GANÉ EL PREMIO

Una compañía coloca, al azar, un cupón con un número del 0 al 9 en cada caja de cereal que vende. Se ofrece un premio a quien logre reunir todos los números aleatorios para estimar la cantidad promedio de cajas que habría que comprar para ganar el premio. Halla esa cantidad de acuerdo a tu simulación.

ACTIVIDAD HORNEANDO GALLETITAS

Doña Juana tiene una lámina de forma cuadrada con 100 moldes de hornear sus galletitas con bolitas de chocolate incrustadas (ver figura).



Ella prepara suficiente masa para 100 galletitas y mezcla en ésta, al azar, 100 bolitas de chocolate. Luego, llenará todo el molde. ¡Cómo estimar cuántas bolitas de chocolate le tocarán a cada galleta!

1. Diseña una simulación con números aleatorios para estimar el número de galletas que saldrán con 0, 1, 2, … bolitas de chocolate.

2. Usando la simulación llena la tabla siguiente:

Número de bolitas de chocolate	**Número de galletitas que salen con esa cantidad de bolitas**
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Si se escoge una galletita al azar, ¿cuál es la probabilidad estimada de que no contenga bolitas de chocolate?